



Application de méthodes inverses au dépouillement de l'essai aux barres de Hopkinson.

Laurent Rota

► To cite this version:

Laurent Rota. Application de méthodes inverses au dépouillement de l'essai aux barres de Hopkinson.. Sciences de l'ingénieur [physics]. Ecole Polytechnique X, 1997. Français. NNT : . pastel-00000895

HAL Id: pastel-00000895

<https://pastel.archives-ouvertes.fr/pastel-00000895>

Submitted on 30 Jul 2010

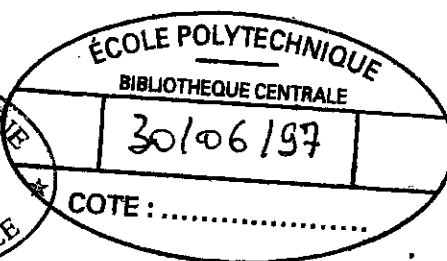
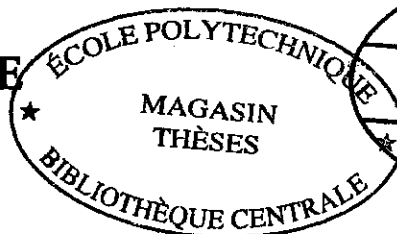
HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



POLYTECHNIQUE

97 EP 0007



Thèse présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

USUEL

Spécialité : *Mécanique*

G2A 273

par

1997

ROT

Laurent ROTA

b

titre :

**Application de Méthodes Inverses au Dépouillement
de l'Essai aux Barres de Hopkinson**

soutenue le 21 Février 1997 devant le jury composé de :

M. H.D. BUI
M. Ph. BENSUSSAN
M. P. LADEVEZE
M. M. BONNET
M. G. GARY
M. S. WALLEY

Président
Rapporteur
Rapporteur
Examineur
Directeur de Thèse
Examineur



120599

A mes Parents

"Maintenant raisonne un peu, me dit mon maître. Toutes les pièces que nous avons vues comptaient une fenêtre...

- A part celles qui ont sept côtés, dis-je.

- Et c'est normal, ce sont celles qui se trouvent au centre de chaque tour.

- Et a part quelques unes que nous avons trouvées sans fenêtre et qui n'étaient pas heptagonales.

- Oublie-les. D'abord trouvons la règle, ensuite nous chercherons à justifier les exceptions.

La plus grande confusion obtenue avec le plus grand ordre : ce me semble un calcul sublime. Les bâtisseurs de la bibliothèque étaient de grands maîtres."

UMBERTO ECO, *Le nom de la rose, Troisième jour, Vêpres.*

Mon choix d'entreprendre un travail de thèse dans le domaine de la Mécanique des Solides est en partie dû à Jean Salençon qui, à travers son cours de Mécanique des Milieux Continus, m'a fait découvrir un domaine sur lequel je me posais de multiples questions. Qu'il en soit remercié.

Dans l'environnement assez exceptionnel que représente, par sa qualité et sa diversité, le Laboratoire de Mécanique des Solides, beaucoup de réponses m'ont été apportées mais des interrogations bien plus nombreuses se sont formulées au cours de ces années de thèse... Aussi, je tiens à remercier le Directeur du LMS, Pierre Bérest, pour m'avoir accueilli et gardé au sein des équipes de recherche. J'ai pu y travailler et avoir des échanges, tant sur un plan scientifique qu'humain, avec des chercheurs compétents et toujours disponibles.

Ensuite, je remercie vivement Hui Duong Bui, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de ma thèse, Pierre Ladevèze et Philippe Bensussan, qui ont accepté d'en être les rapporteurs et que je remercie pour le temps qu'ils ont passé à évaluer mon manuscrit. Je remercie bien sûr les examinateurs, Marc Bonnet, qui, par de nombreuses discussions, a contribué à l'orientation de ce travail, et Stephen Walley, qui, malgré la difficulté linguistique, a témoigné d'un grand intérêt pour mon mémoire.

Ma profonde reconnaissance va à Gérard Gary, mon Directeur de Thèse, qui m'a transmis sa passion pour la Dynamique des Solides. Sans son expérience et son intuition, dont il m'a fait profiter en laissant toutefois une grande liberté dans l'orientation de mes recherches, cette thèse n'aurait sûrement pas vu le jour.

Je tiens enfin à remercier ma famille, tous mes collègues et amis, du laboratoire ou d'ailleurs, qui m'ont soutenu et encouragé, pour nos discussions plus ou moins sérieuses et avec qui j'ai passé d'agréables moments.

Table des matières

Présentation	5
I L'ESSAI AUX BARRES DE HOPKINSON	7
1 Les essais dynamiques	9
1.1 Motivation	9
1.2 Domaines de comportement	9
1.3 Les essais aux barres de Hopkinson	11
1.3.1 Description du dispositif	11
1.3.2 Principe	11
1.3.3 Elargissement du système des barres de Hopkinson	12
2 Théorie des barres de Hopkinson	17
2.1 Hypothèses	17
2.2 Modélisation des barres	17
2.2.1 Equations du mouvement	17
2.2.2 Ondes	18
2.2.3 Remarque sur la modélisation des barres	19
2.3 Résolution de l'équation des ondes. Conséquences	20
2.3.1 Réponse impulsionnelle	20
2.3.2 Réponse dans le cas général	22
2.4 L'essai aux barres de Hopkinson	24
2.4.1 Relations aux interfaces barres - échantillon	24
2.4.2 Hypothèse quasi-statique	25
2.4.3 Traitement des signaux de jauge	26
2.4.4 Limitations du dispositif	27
2.5 Conclusion de la première partie	28

II	APPROCHE THEORIQUE, PROBLEME INVERSE	29
3	Analyse de l'essai SHPB dans l'optique du calcul inverse	31
3.1	Analyse des données expérimentales	31
3.2	Exploitation des données expérimentales	34
4	Le problème d'identification	37
4.1	Généralisation du problème posé par l'essai SHPB	37
4.2	Problématique inverse	38
4.3	Analyse des données expérimentales	40
4.4	Modélisations	41
4.4.1	Description géométrique de la structure	42
4.4.2	Modélisation des efforts	42
4.4.3	Comportement	43
5	Outils de résolution	47
5.1	Le problème direct	47
5.2	Etude du problème direct	48
5.2.1	Unicité de la solution	49
5.2.2	Equivalence des conditions aux limites	50
5.2.3	Opérateur Dirichlet-Neumann	51
5.2.4	Le problème de Cauchy	52
5.3	Le problème type idéalisé	55
5.4	Admissibilité et compatibilité	57
5.4.1	Admissibilité statique, cinématique et dynamique	57
5.4.2	Réponses admissibles d'un comportement	58
5.4.3	Compatibilité des conditions aux limites	59
6	Solution du Problème Type Idéalisé et écarts. Solution du Problème Type	61
6.1	Solution du problème type idéalisé	61
6.2	Construction de la solution du (PTI)	63
6.3	Construction d'une solution compatible du (PTI)	65
6.4	Mesure de l'écart entre solutions	72
6.4.1	Définition d'un écart	72
6.4.2	Ecarts quadratiques	72
6.4.3	Ecarts énergétiques	74
6.4.4	Ecart en puissance	79
6.4.5	Commentaires	81
6.5	Résolution du problème type	82
6.6	Conclusion de la deuxième partie	87
III	APPLICATION A L'ESSAI AUX BARRES DE HOPKINSON	89
7	Modélisation de l'essai dynamique	91
7.1	Problème direct	91
7.2	Choix d'une classe de comportement	92
7.2.1	Lois phénoménologiques	92
7.2.2	Modèles rhéologiques	93

7.3	Equations d'évolution	95
7.4	Résolution numérique du problème direct d'évolution	96
7.4.1	Méthode des caractéristiques	96
7.4.2	Application de la méthode des caractéristiques	98
7.4.3	Résolution par différences finies	99
7.4.4	Méthode des éléments finis	100
7.4.5	Problème aux limites et problème de Cauchy	100
7.4.6	Comparaison des méthodes	102
8	Résolution numérique du problème d'identification	107
8.1	Stratégies de minimisation	107
8.2	Fonction coût	108
8.3	Méthodes de descente	108
8.3.1	Algorithme BFGS	109
8.3.2	Méthode de minimisation unidimensionnelle, ou " <i>line search</i> "	111
8.4	Evaluation du gradient de la fonctionnelle coût	112
8.4.1	Gradient évalué par différences finies	112
8.4.2	Gradient évalué par différentiation directe	112
8.4.3	Gradient évalué par état adjoint	113
8.4.4	Comparaison des méthodes	123
8.5	Algorithmes génétiques	125
8.5.1	Principe	125
8.5.2	Initialisation et critère d'arrêt	126
8.5.3	Opérateurs d'évolution	126
8.6	Récapitulation	128
9	Application, exemples	129
9.1	Données simulées	129
9.2	Données expérimentales	134
9.3	Construction de conditions compatibles	137
9.4	Effet du bruit	139
9.5	Algorithme génétique	144
9.6	Conclusion de la troisième partie	147
	Conclusion	149
	Bibliographie	151

Présentation

Les moyens de calcul mis à la disposition du mécanicien sont devenus suffisamment puissants pour concevoir une structure mécanique complexe et prévoir son évolution dans le temps, pour les nombreux types de chargements qu'elle est susceptible de subir au cours de sa vie. Le coût réduit de ces simulations, en temps et en moyens matériels, ouvre ainsi des possibilités au niveau de la compréhension des phénomènes mécaniques et physiques dont la structure est le siège. En conséquence, il permet l'optimisation de cette structure.

Cependant, il ne faut jamais perdre de vue que la validité d'une simulation n'est acquise que par sa concordance avec l'expérimentation. C'est pourquoi, il est nécessaire de développer des modélisations cohérentes avec les observations expérimentales, en particulier en ce qui concerne le comportement du (des) matériau(x) constituant la structure.

La motivation initiale de cette étude est liée au cas de la simulation de l'évolution *dynamique* d'une structure, dans des cas de chargements *transitoires*. Un exemple qui illustre bien cette situation est celui du choc d'une automobile sur un obstacle. Les éléments de la structure sont alors sollicités à de *grandes vitesses de déformation* : le code de calcul, pour fournir une simulation réaliste, doit utiliser une *loi de comportement* capable de décrire le matériau soumis à de telles vitesses de déformation.

Pour déterminer un comportement, on envisage généralement des expériences simples et d'interprétation facile. Dans le cadre du comportement dynamique des matériaux, un dispositif adéquat est le dispositif des *barres de Hopkinson*, qui impose le plus souvent un chargement dynamique de compression à un échantillon. L'exploitation de ce test simple donne accès au comportement (ou au moins à une partie de celui-ci, si l'essai se limite à la compression). L'analyse classique de cet essai est similaire à celle que l'on appliquerait à un test de compression simple avec une presse hydraulique : cette analyse quasi-statique conduit à une courbe contrainte-déformation $\sigma = f(\epsilon)$, où la vitesse de déformation, si elle intervient, est généralement considérée comme un paramètre, fixé par l'expérience. Cette analyse donne ainsi accès au comportement du matériau.

Ce qui pose problème dans l'essai aux barres de Hopkinson est précisément cette analyse quasi-statique puisque, justement, cet essai est dynamique. Cette étude consiste donc en une nouvelle approche du dépouillement de l'essai aux barres de Hopkinson, qui tient compte, pour

interpréter l'essai, des effets transitoires, avec pour but final la détermination du comportement du matériau testé.

Ce mémoire s'articule sur trois parties. Dans la première partie, on précise ce que l'on entend par comportement d'une structure dans le domaine dynamique et on décrit le dispositif des barres de Hopkinson utilisé pour caractériser le comportement des matériaux dans ce domaine. On s'intéresse en particulier aux possibilités et aux limites du dispositif : elles permettent de mettre à jour les difficultés posées par l'interprétation des mesures, qui conduisent, dans la deuxième partie, à une *approche* du type *inverse* pour exploiter les résultats du test.

Dans cette deuxième partie, les données expérimentales de l'essai aux barres de Hopkinson sont analysées pour donner un cadre général à l'identification d'un comportement homogène, développé ici de façon théorique. Cette identification consiste en un *problème inverse*, dont on discute et on caractérise les solutions, selon le type de données expérimentales. La définition de ces solutions repose sur une notion d'*écart entre évolutions*, aussi présentée dans cette partie.

Dans la troisième et dernière partie, on applique le cadre théorique construit à l'essai aux barres de Hopkinson. Pour cela, sont explicitées la manière de modéliser le test aux barres de Hopkinson et la méthode d'identification, qui conduisent à quelques applications numériques permettant d'illustrer les possibilités et les difficultés de la détermination du comportement.

Partie I

**L'ESSAI AUX BARRES DE
HOPKINSON**

1

Les essais dynamiques

RÉSUMÉ : On présente ce que l'on entend par domaine de comportement d'une structure et quelles sont les motivations de l'expérimentation dans le domaine particulier de la dynamique. On décrit ensuite le dispositif des *barres de Hopkinson* bien adapté pour caractériser le comportement des matériaux dans ce domaine.

1.1 Motivation

La puissance actuelle de l'outil informatique autorise des calculs et simulations de structures de complexité croissante soumises à des chargements *dynamiques*. Un exemple représentatif est la simulation du "crash test" d'un véhicule automobile. Une situation de ce type occasionne d'importantes déformations avec des vitesses telles que les effets d'inertie ne peuvent être négligés : le cadre est donc celui de la *dynamique transitoire*.

Bien entendu, pour ces simulations il est nécessaire de connaître le comportement du matériau et comme la réponse de celui-ci est bien souvent dépendante de la vitesse de sollicitation, il faut fournir au code de calcul une loi de comportement *dynamique*, valable pour les sollicitations rencontrées en chaque point de la structure et à tout instant du chargement. C'est l'expérimentation dynamique sur des structures simples, principalement à l'aide de barres de Hopkinson (ou autre système dérivé) qui donne accès au comportement dynamique des matériaux. Les possibilités alors ouvertes pour le calcul de structures en dynamique transitoire représentent l'une des principales motivations de l'expérimentation dynamique.

1.2 Domaines de comportement

La connaissance du comportement des matériaux entrant dans la construction d'une structure mécanique est nécessaire pour prévoir l'évolution de cette structure. Il n'est cependant pas possible, dans une modélisation simple, de décrire le comportement du matériau pour tous types de sollicitation. C'est pourquoi on se restreint à la réponse du matériau pour des chargements rencontrés sur la structure "en service". Cette notion couvre généralement non seulement le fonctionnement usuel de la structure, mais encore certaines situations exceptionnelles ou accidentelles. Il est donc nécessaire de connaître avec précision quels chargements subit la structure

en service. Les principaux paramètres qui caractérisent une sollicitation sont (en première approche) au nombre de trois:

- l'amplitude A du chargement,
- sa durée D ,
- la façon dont le chargement varie au cours du temps ; un temps caractéristique T de ces variations est alors introduit.

La description de la structure est, de la même manière, réduite aux trois paramètres :

- L_{cara} , une dimension caractéristique de la structure,
- T_{cara} , un temps caractéristique de la structure. Il s'interprète comme le temps mis par une impulsion (typiquement produite par un "coup de marteau") pour parcourir une distance de l'ordre de L_{cara} au sein de la structure. On peut aussi définir une célérité caractéristique des ondes dans la structure par $C_{cara} = L_{cara}/T_{cara}$.
- A_{cara} , une intensité du chargement maximal admissible pour la structure pour un type de chargement donné, au sens où pour toute intensité de chargement inférieure à A_{cara} l'intégrité de la structure est assurée (une intensité supérieure rendant la ruine de la structure possible). (charge maximale d'un pont, couple maximal applicable à un arbre, etc...). De plus, si le chargement est faible ($A \ll A_{cara}$) la réponse de la structure est généralement linéaire et devient non-linéaire lorsque A devient de l'ordre de A_{cara} (tout en restant inférieure à cette valeur).

La comparaison des paramètres caractéristiques de la structure et du chargement permet de classer les différents types de chargements.

Si $D \gg T$, on suppose bien sûr que l'intensité du chargement A est suffisamment faible devant A_{cara} pour que la durée de vie de la structure soit effectivement au moins de l'ordre de D et donc bien supérieure à la période caractéristique du chargement. Si $T \gg T_{cara}$ la variation temporelle du chargement est suffisamment lente pour que la structure puisse suivre de façon globale les variations de la sollicitation : les effets d'inertie sont alors négligés et il n'y a pas de phénomène de propagation d'ondes si bien que le chargement peut être considéré comme **quasi-statique**.

Dans le cas $T \sim T_{cara}$ ou $T \ll T_{cara}$, les effets d'inertie doivent être pris en compte : la réponse de la structure est qualifiée de **dynamique** et cette structure est le siège de phénomènes de **propagations d'ondes**, conséquence des effets inertiels. Lorsque l'amplitude des sollicitations est faible ($A \ll A_{cara}$) la réponse de la structure est généralement linéaire et si le chargement est périodique, la réponse est qualifiée de **vibratoire**, état limite succédant à une (brève) période transitoire.

Lorsque la sollicitation est quelconque (non périodique), le phénomène est qualifié de **dynamique transitoire**. Dans ce cas, le chargement peut généralement se décomposer en deux phases. Pour le choc de deux structures, par exemple, il existe une phase de mise en charge dont le temps caractéristique est $T \ll T_{cara}$, suivi d'une phase de *mise en équilibre* durant laquelle le chargement varie peu (le temps caractéristique associé au chargement devient dans cette phase est $T \gg T_{cara}$). Cette mise en équilibre de la structure (homogénéisation des champs mécaniques) correspond généralement à quelques dizaines de T_{cara} ; les instants suivants peuvent être décrits de manière quasi-statique, dans la mesure où le chargement ne conduit pas à la ruine totale de la structure (c'est à dire $A \sim A_{cara}$). C'est ce type de chargement qui sera prépondérant tout au long de l'étude, puisque c'est celui qui est obtenu lors des tests dynamiques aux barres de Hopkinson.

1.3 Les essais aux barres de Hopkinson

1.3.1 Description du dispositif

Le dispositif expérimental des barres de Hopkinson (Kolsky [62], [63], Hopkinson [56], Davies [31]) ou SHPB (pour Split Hopkinson Pressure Bar) permet d'étudier le comportement des matériaux sous sollicitation dynamique. Le chargement appliqué durant l'essai est, suivant le dispositif employé, de compression, de torsion ou de traction à grande vitesse de déformation. On s'intéressera plus particulièrement au dispositif de compression (figure 1.1). Ce dispositif

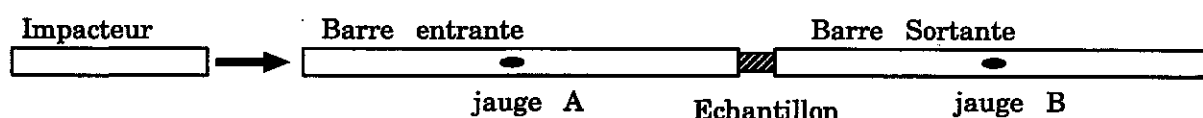


Figure 1.1 : Système de barres de Hopkinson

fonctionne de la façon suivante : l'échantillon à tester est placé entre deux barres appelées barre entrante et barre sortante ; une troisième barre, l'impacteur, est projetée sur la barre entrante (système pneumatique) : de ce choc résulte le chargement dynamique de l'échantillon. Bien que le dispositif serve à caractériser le comportement de l'échantillon, le choc de l'impacteur sollicite de façon globale le système. Le chargement induit par le choc de l'impacteur est toujours suffisamment violent pour que le temps caractéristique T qui lui est associé soit très petit devant le temps caractéristique T_{cara} associé, par exemple, à l'une des barres. Un temps caractéristique T représentatif du chargement est fourni par la durée du "flanc de montée" de l'onde incidente (figure 1.2, $T \approx 40 \mu s$) ; le temps caractéristique T_{cara} est la durée d'un aller-retour dans une barre (soit $T_{cara} \approx 1000 \mu s$). Une description correcte du chargement passe donc obligatoirement par une description dynamique transitoire de tout le dispositif.

1.3.2 Principe

Comme nous l'avons dit ci-dessus, le principe du chargement repose sur la propagation d'ondes dans le système de barres. Le projectile induit une onde de compression élastique dans la barre entrante. On suppose par ailleurs rester en régime élastique en tout point des barres (intégrité du banc de test !). Cette onde incidente se propage alors jusqu'à l'échantillon. Le changement de nature du milieu entraîne, au niveau de l'interface, une réflexion dans la barre entrante et une transmission, à travers l'échantillon, vers la barre sortante. Cet ensemble de barres permet le chargement de l'échantillon et la mesure des ondes de déformation dans les barres, équipées de jauges de déformation. Le traitement des mesures des ondes incidente, réfléchie et transmise permet de déterminer quel a été le chargement de l'échantillon. Pour éviter la superposition des signaux incident et réfléchi au niveau de la mesure en A, la longueur de l'impacteur est choisie strictement inférieure à la moitié de celle de la barre entrante (en supposant ces deux barres de même nature). La figure 1.2 représente un enregistrement des signaux obtenus au niveau des jauges de la barre entrante (ondes incidente et réfléchie) et sortante (onde transmise).

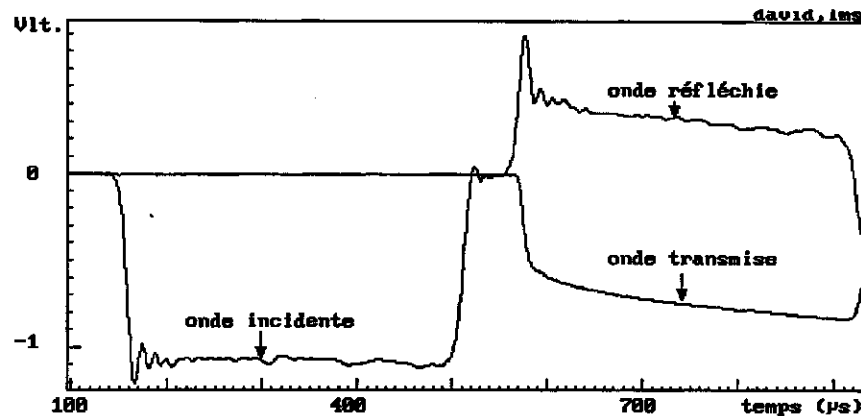


Figure 1.2 : Signaux de jauge aux barres de Hopkinson

1.3.3 Elargissement du système des barres de Hopkinson

Différents chargements

Le dispositif le plus simple et le plus couramment utilisé est celui permettant une sollicitation en compression de l'échantillon. Cette géométrie est très simple et autorise un dépouillement de qualité. Cependant, et au prix d'un traitement moins rigoureux (hypothèses simplificatrices concernant l'équilibre de l'échantillon et l'homogénéité des champs mécaniques dans celui-ci), les développements de ce système, présentés ci-après, permettent d'étendre significativement le champ d'application du système des barres de Hopkinson.

- Les essais de traction dynamique utilisent un montage inverseur dont l'impédance est égale à celle des barres, ou plus simplement un impacteur tubulaire qui permet une sollicitation en traction de la barre entrante (Harding, Wood, Campbell [54]). Néanmoins, la fixation de l'échantillon sur les barres reste délicate, et les conséquences de cet encastrement imparfait ne sont pas sans poser des difficultés d'interprétation lors du dépouillement.

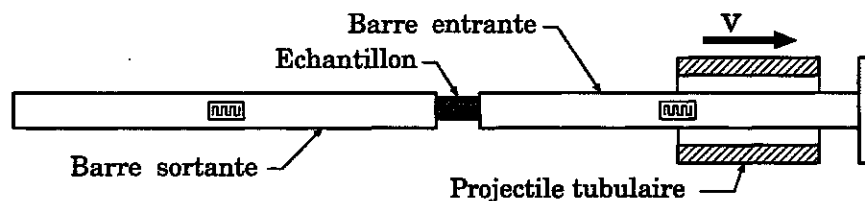


Figure 1.3 : Montage de traction dynamique

- L'essai de torsion dynamique (Duffy, Campbell, Hawley [34]) nécessite lui aussi un échantillon solidaire des barres. Le chargement est obtenu en libérant brutalement une portion de barre entrante préalablement précontrainte en torsion ; le système de barres est alors parcouru par une onde de cisaillement.
- L'essai de cisaillement dynamique de tôles mis au point par Nowacki et Gary (Gary, Nowacki [44]) utilise un montage transformant la compression en cisaillement de la tôle dans son plan. La tôle est prise entre les parties (1) et (2) d'un système coulissant en contact respectivement

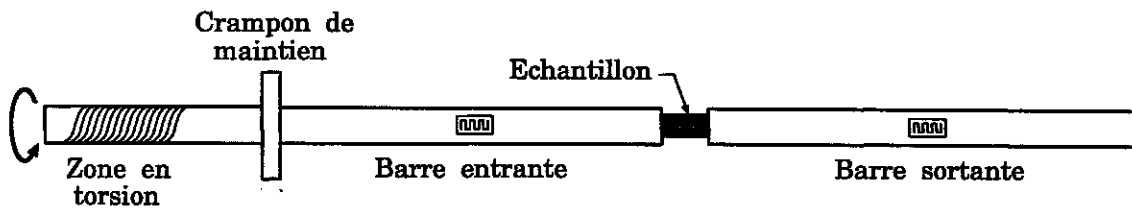


Figure 1.4 : Montage de torsion dynamique

avec les barres entrante et sortante. Les portions rectangulaires situées entre les mors (1) et (2) sont ainsi soumises à un cisaillement.

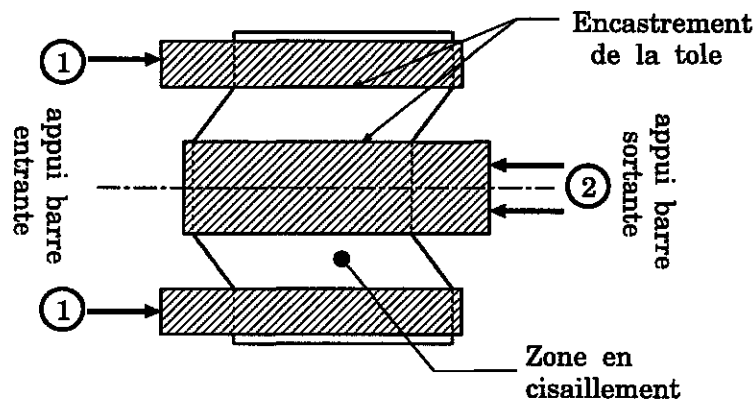


Figure 1.5 : Montage de cisaillement dynamique

- Les essais de sollicitation dynamique de géomatériaux granulaires (sables, argiles) sont réalisés grâce à une cellule de confinement rigide, pour les essais oedométriques, ou à confinement imposé (Semblat [87]). Dans ce dernier cas, le confinement est obtenu en imposant une pression à l'intérieur de la cellule grâce à un fluide. Ce confinement est qualifié de *souple* si ce fluide est de l'air et de *semi-rigide* pour de l'huile. On peut noter qu'il est possible d'utiliser une troisième barre, perpendiculaire à l'axe du système et en contact avec l'échantillon, qui permet une mesure de contrainte latérale de l'échantillon. Cette mesure donne accès aux grandeurs scalaires p et q , les contraintes moyenne et déviatorique, classiquement utilisées dans l'étude des matériaux granulaires.

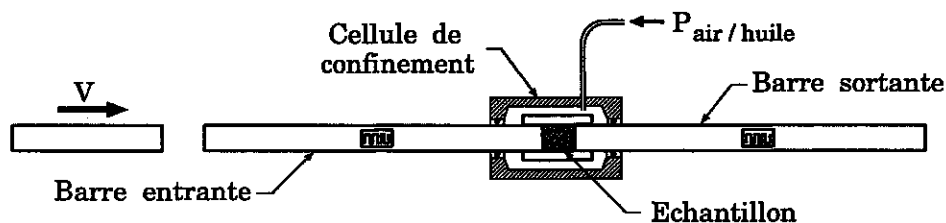


Figure 1.6 : Cellule de confinement

- Des essais de rupture dynamique ont été développés par Maigre et Rittel (Maigre, Rittel [72], [82]). L'essai sur des éprouvettes de forme particulière, dites éprouvettes compactes de compression (ECC) (Maigre, Rittel [73]), donne accès, moyennant l'hypothèse du régime élastique, au facteurs d'intensité des contraintes en dynamique. La détermination des facteurs d'intensité des contraintes K_I^d (mode I) et de K_{II}^d (mode II) repose sur une méthode de déconvolution (Bui, Maigre, Rittel [21]) par comparaison de deux expressions d'un même invariant intégral.

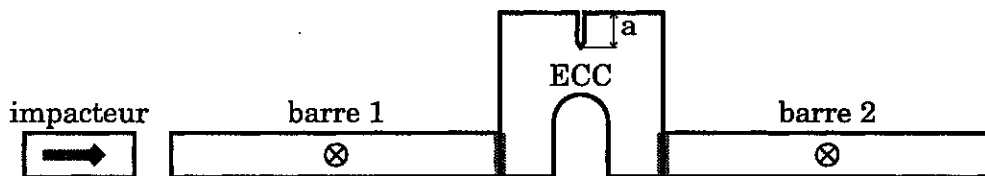


Figure 1.7 : Essai de rupture dynamique

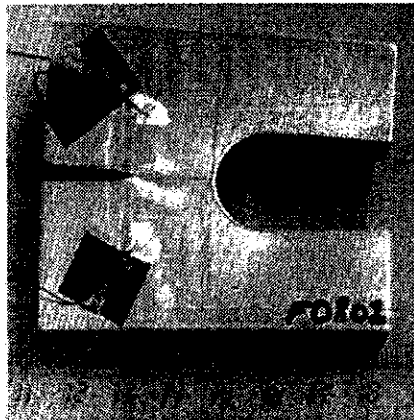


Figure 1.8 : Eprouvette compacte de compression

- Avec le montage bloc-barre, le chargement est obtenu par impact direct de l'impacteur sur l'échantillon (figure 1.9) et non pas via une onde de compression transmise par une barre entrante. L'impacteur est généralement assez massif si bien que les vitesses de déformations obtenues durant ce test sont (généralement) plus élevées qu'avec le système à trois barres (10^3 s^{-1} à 10^5 s^{-1}). Ce dispositif a ainsi permis de caractériser des métaux à très grande



Figure 1.9 : Montage bloc-barre

vitesse de déformation (Gorham [51], Gorham, Pope, Field [52]) et de comprendre la sensi-

bilité aux chocs de certains explosifs, en les soumettant à ces vitesses de déformation (Walley, Field, Palmer [93]).

Prises de vue

Diverses techniques permettent de réaliser des prises de vues à très court temps de pose (inférieur à $10\mu s$). Dans notre laboratoire, un ensemble de quatre caméras CCD permet de visualiser l'échantillon lors du test. La durée du test (de l'ordre de quelques centaines de microsecondes) est telle que chaque caméra ne peut prendre qu'une seule vue durant l'essai (période de restauration de la matrice CCD trop importante) de sorte que l'on dispose de quatre instantanés, synchronisés sur l'arrivée de l'onde incidente au niveau de la jauge de la barre entrante. Ces prises de vues permettent d'apporter une information qualitative sur le

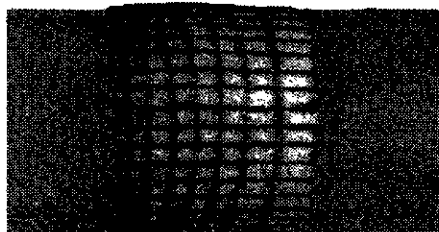


Figure 1.10 : Prise de vue - caméra rapide

déroulement de l'essai ; en particulier, dans le cas de la figure 1.10, l'échantillon n'est pas en équilibre au moment de la prise de vue (voir chapitre 2) et l'on a une idée de la déformation dans l'échantillon grâce au quadrillage, initialement régulier.

Les matériaux testés

Les essais aux barres de Hopkinson ont d'abord été réalisés sur des alliages métalliques (Davies, Hunter [32]). Ces essais autorisent une modélisation dans une large gamme de vitesses de déformation (Gary, Klepaczko, Zhao [40], [41], [42], [43]). Des essais ont aussi été réalisés sur des géomatériaux, par exemple sur du sel gemme (Gary, Klepaczko, Barberis [60]), ou sur des matériaux fragiles (Zhao, Gary, Rota [100]). L'expérimentation sur de tels matériaux est possible grâce à l'*adaptation d'impédance* correcte que l'on peut obtenir entre barres métalliques et échantillon (voir chapitre 2 pour l'adaptation d'impédance).

L'utilisation récente de barres de faible impédance (Zhao [95]) a permis de tester des matériaux "moins résistants" (on précise cette notion "intuitive" dans la suite) comme des mousses, des caoutchoucs. Ces matériaux entrent en effet de plus en plus dans la fabrication d'éléments absorbants ou de sécurité dans de nombreux domaines industriels (automobile, emballages divers) et leur comportement dynamique suscite un intérêt croissant.

2

Théorie des barres de Hopkinson

RÉSUMÉ : On étudie plus en détail le dispositif des barres de Hopkinson, en vue d'en cerner les possibilités et les limites : d'une part en ce qui concerne le montage (de façon intrinsèque) et d'autre part en ce qui concerne l'exploitation que l'on peut faire des mesures obtenues lors d'un test dynamique. Ce sont les difficultés posées par l'interprétation de ces mesures qui conduisent à une approche du type "*méthode inverse*" pour exploiter au mieux les résultats du test.

2.1 Hypothèses

Comme on l'a vu, le fonctionnement des barres de Hopkinson repose sur la propagation d'ondes élastiques. D'autre part, la géométrie du dispositif est bien adaptée à une modélisation unidimensionnelle : les barres sont supposées longues devant leur rayon, et ce rayon est faible devant les longueurs d'onde caractéristiques du chargement. Ces deux hypothèses permettent respectivement de considérer les barres comme infiniment longues et de faire, dans une première approche, l'hypothèse d'ondes planes dans les barres (les variations des champs mécaniques au travers d'une section sont alors négligées).

2.2 Modélisation des barres

2.2.1 Equations du mouvement

Avec ces hypothèses, une barre est considérée comme un milieu unidimensionnel, occupant un segment $[x_1, x_2]$ de l'axe réel Ox (modélisation poutre en extension). Les paramètres caractérisant ce système sont donc les longueurs des barres, leur section S , leur module élastique E et leur masse volumique ρ . Les équations d'équilibre et de comportement sont les suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \sigma = E \epsilon \quad \text{avec} \quad \epsilon = \frac{\partial u}{\partial x} \end{cases}$$

où σ , ϵ représentent respectivement les champs de contrainte et de déformation longitudinales dans la barre, u étant le déplacement du point matériel d'abscisse x . Ces champs sont, sous les

hypothèses faites, homogènes dans chaque section.

Par élimination de σ et ε , on retrouve l'équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

avec $C = \sqrt{E/\rho}$ la célérité des ondes élastiques unidimensionnelles dans la barre. La solution générale de cette équation est de la forme :

$$u(x, t) = f(x - Ct) + g(x + Ct) \quad (2.1)$$

dans laquelle les fonctions arbitraires f et g décrivent respectivement les ondes se propageant vers les x positifs et vers les x négatifs à la célérité C . Par hypothèse, le déplacement $u(x, t)$ est supposé continu en x et t (intégrité de la barre et pas d'accélération infinie), ce qui entraîne la continuité des déplacements f et g . En revanche, rien n'impose à f et g d'être dérivables, aussi, leurs dérivées premières dans l'expression de σ et $v = \frac{\partial u}{\partial t}$ doivent être prises au sens des distributions ; ceci permet de décrire d'éventuelles discontinuités de contrainte et de vitesse. Ces discontinuités doivent vérifier l'équilibre et ne sont donc pas indépendantes ; il convient alors d'ajouter la *relation de saut* à travers une discontinuité ($\llbracket y \rrbracket = y(m^+) - y(m^-)$) représente le saut du champ y à travers la surface de discontinuité, au point m) :

$$\llbracket \sigma \rrbracket + \rho \tilde{C} \llbracket v \rrbracket = 0 \quad (2.2)$$

Cette discontinuité se déplace à la vitesse \tilde{C} valant $+C$ (resp. $-C$) pour une discontinuité qui se déplace vers les x positifs (resp. négatifs).

2.2.2 Ondes

Dans la modélisation choisie, les champs de vitesse, déformation et contrainte sont décrits par des grandeurs f' et g' (dérivées par rapport à l'argument), pouvant présenter des sauts et se propageant à la célérité C . Nous sommes donc amenés à préciser ce que l'on entend par *onde*. On adoptera la définition suivante d'une onde (Germain, Muller [48]) :

DÉFINITION : Considérons une structure $\Omega \in \mathbb{R}^3$ sur laquelle est défini un champ mécanique $u(x, t)$. Soit \mathcal{S} une surface dans Ω telle que u ainsi que toutes ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre $(n - 1)$ soit continues à travers cette surface et que l'une au moins de ses dérivées à l'ordre n soit discontinue à travers \mathcal{S} . Si de plus \mathcal{S} est une surface mobile, $\mathcal{S} = \mathcal{S}(t)$ est qualifiée d'**onde**.

L'entier n caractérise l'ordre de discontinuité de l'onde. Certaines valeurs de n sont remarquables lorsque $u(x, t)$ représente un champ de déplacement dans Ω :

- $n = 0$: discontinuité des déplacements ; c'est le cas d'une fissure dans le milieu, d'une perte de connexité ou encore d'une incompatibilité cinématique par interpénétration (ce cas n'est donc pas à proprement parler une onde).
- $n = 1$: cas de l'**onde de choc** ou onde à forte discontinuité. Les principaux champs mécaniques sont alors discontinus : on montre que la vitesse particulière $v = du/dt$ et la déformation $\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla^t u)$ sont discontinues le long du front $\mathcal{S} = \mathcal{S}(t)$ qui se déplace à la célérité C , (dite) célérité des ondes. Par suite la contrainte est aussi discontinue (conservation de la quantité de mouvement).
- $n \geq 2$: l'onde est appelée onde d'accélération. ◇

Le cadre fixé au paragraphe précédent permet ainsi l'existence d'ondes de choc, dues aux discontinuités éventuelles des fonctions f' et g' .

2.2.3 Remarque sur la modélisation des barres

Dans les hypothèses de l'élasticité (unidimensionnelle), ce choc n'a *pas* son origine dans la physique du phénomène mais est uniquement dû au choix d'un espace fonctionnel suffisamment vaste pour la recherche de solutions.

De façon générale, la description d'un système physique s'obtient en écrivant les bilans des grandeurs physiques qui nous intéressent (densités volumiques, flux) pour un volume de contrôle quelconque donné (fixe ou mobile). De cette analyse, on déduit un système d'équations aux dérivées partielles et des conditions qui doivent être vérifiées aux limites du système étudié.

Deux cas se présentent selon que le système d'équations aux dérivées partielles est *linéaire* ou *non linéaire*.

Dans le cas d'un système linéaire, on peut définir une *solution élémentaire* s_0 , réponse à une sollicitation unitaire δ_0 , de sorte que la réponse s à une sollicitation quelconque e s'obtient par convolution avec la solution élémentaire $s = s_0 * e$ (la définition de la sollicitation unitaire et du produit de convolution étant particulière à chaque problème). On obtient donc une solution au sens des distributions pour toute sollicitation dans le sous-espace des distributions à support convolutif avec celui de la solution élémentaire. Ceci explique pourquoi la solution de l'équation des ondes est prise au sens des distributions et justifie que l'on s'intéresse dans la suite à la réponse d'un système de barres à un pic de Dirac en vitesse ou en contrainte.

En revanche, si le système d'équations aux dérivées partielles est non linéaire, il se peut que les solutions présentent des discontinuités sur certaines surfaces, mobiles à l'intérieur du système. Sur ces surfaces sont vérifiées des *relations de saut* obtenues conjointement au système d'équations aux dérivées partielles, mais à partir d'un bilan qui autorise l'existence de discontinuités (mobiles). La génération de ces discontinuités est généralement liée à des phénomènes non linéaires de *convection* ; ceux-ci ont en quelque sorte un effet "cumulatif" qui tend à générer de discontinuités. Un bon exemple de ce phénomène est celui du gaz parfait compressible que l'on comprime à l'aide d'un piston dans un tube semi-infini (Mandel [75]) : en supposant l'écoulement isentropique, la célérité des ondes croît avec la pression, ainsi, l'onde créée au temps $t + dt$ se propage dans le milieu plus vite que celle créée au temps t (puisque la pression est alors plus élevée), si bien que les ondes ont tendance à se superposer et créer "naturellement" une discontinuité. Les discontinuités rencontrées dans les systèmes non-linéaires sont donc de nature totalement différente de celles autorisées dans un problème linéaire où les discontinuités de la solution sont nécessitées par la modélisation adoptée et il n'existe pas de solution classique C^∞ (Germain [46]).

L'analyse faite par P. Germain et E.H. Lee (Germain, Lee [47]) entraîne une hiérarchisation dans la modélisation d'un même phénomène. En effet, la solution discontinue ou *de choc* correspond en quelque sorte à une "carence" du modèle dans la description de la zone de choc. La prise en compte d'effets dissipatifs complémentaires dans les zones à fort gradient (meilleure description physique locale) conduit à l'existence d'une solution au sens classique (le mécanisme dissipatif régularise la solution). Les effets dissipatifs introduits restent bien sûr négligeables dans les zones initialement régulières (cohérence du modèle initial) et contrebalancent les effets de convection, générateurs de discontinuité, dans les zones à fort gradient. On constate donc qu'à un raffinement du modèle correspond, en général, une diminution de la taille de l'espace fonctionnel dans lequel on recherche les solutions.

2.3 Résolution de l'équation des ondes. Conséquences

2.3.1 Réponse impulsionnelle

Considérons tout d'abord une barre semi-infinie de caractéristiques suivantes : masse volumique ρ_B , section S_B célérité des ondes élastiques C_B . Le module d'élasticité est noté E_B et vérifie $E_B = \rho_B C_B^2$. On définit alors l'impédance Z de la barre par $Z_B = \rho_B C_B S_B$. La relation de saut pour l'équation des ondes (2.2) s'écrit :

$$[[f]] + \tilde{Z}[v] = 0$$

avec $f = \sigma S$ résultante des efforts appliqués à une section de barre et $\tilde{Z} = -Z$ (resp. $+Z$) pour une onde se déplaçant vers les x positifs (resp. négatifs).

Si la barre est initialement au repos ($v = 0, \sigma = 0, \forall x$), l'application d'un échelon de vitesse (V_0) à $t = 0$ génère une onde se déplaçant vers les x positifs à la célérité C_B . L'état de la barre est donc le suivant :

- pour $x < C_B t$: $v = V_0, f = Z_B V_0$
- pour $x > C_B t$: $v = 0, f = 0$

De la même façon, l'application d'un dirac de vitesse δ_0 à l'instant $t = 0$ entraîne la propagation de ce dirac en vitesse à la célérité C_B et d'un dirac de contrainte d'intensité Z_B à la même célérité C_B . Cette dernière solution constitue la solution élémentaire de la barre semi-infinie. La solution pour une sollicitation quelconque s'obtient ensuite simplement par convolution avec la solution élémentaire, par exemple :

$$v(x, t) = \delta_{(x-C_B t)} \star V_0(t) = V_0(t - x/C_B)$$

où δ_τ est la distribution de Dirac à l'instant τ , et $V_0(t)$ la vitesse imposée en bout de barre ($x = 0$).

Ce cadre permet d'introduire la méthode de résolution par *polaires de choc* appliquée à un système de barres unidimensionnelles. On constate, en effet, que l'état du milieu est déterminé par le couple (v, f) formé de la vitesse particulière au niveau de la section d'abscisse x et de la résultante des efforts sur cette même section. On repère alors l'état d'une section donnée par ses coordonnées (v, f) dans le plan \mathbb{R}^2 . L'état initial étant repéré par (v_0, f_0) , une perturbation entraîne une modification de cet état qui se trouve obligatoirement sur la droite :

$$f = f_0 \pm Z(v - v_0)$$

selon que l'onde arrive des x négatifs (signe $-$) ou des x positifs (signe $+$). Illustrons cette méthode par l'exemple simple de deux barres semi-infinies qui se heurtent à l'instant $t = 0$. La barre 1, de caractéristiques Z_1, C_1 arrive à la vitesse v_0 sur la barre 2, de caractéristiques Z_2, C_2 initialement au repos. Les états respectifs des barres sont repérés par les points $A_1(v_0, 0)$ et $A_2(0, 0)$. Après le choc, un état *A identique* se propage dans les deux barres (conditions de continuité à l'interface). Cet ébranlement du milieu se déplace respectivement aux célérités $+C_2$ et $-C_1$. Le point représentatif de l'état *A* se trouve donc sur les polaires issues de A_2 (pente $-Z_2$) et de A_1 (pente $+Z_1$) soit :

$$v = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} v_0 \quad f = -\frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} v_0$$

Cette méthode permet donc une résolution rapide des problèmes de propagation d'ondes dans le milieu unidimensionnel puisque cette analyse donne directement accès à la solution élémentaire.

Pour le cas simple des deux barres, l'application à l'interface des deux barres d'un dirac de vitesse à $t = 0$ (noté $(v_0, 0)$ $\delta_0 = A_1 \delta_0$) entraîne la propagation des pics $A \delta_{(x+C_1 t)}$ et $A \delta_{(x-C_2 t)}$ dans les barres 1 et 2 aux célérités $-C_1$ et $+C_2$ respectivement.

On applique à présent la méthode des polaires de choc au montage suivant, proche des barres de Hopkinson, mais formé de barres élastiques semi-infinies (identiques). L'échantillon est supposé élastique lui aussi. Les caractéristiques du dispositif sont la masse volumique la section et la célérité ρ_B, S_B, C_B des barres et ρ_E, S_E, C_E de l'échantillon. Les modules d'élasticité respectifs sont E_B et E_E . $Z_B = \rho_B C_B S_B$ et $Z_E = \rho_E C_E S_E$ sont les impédances des barres et

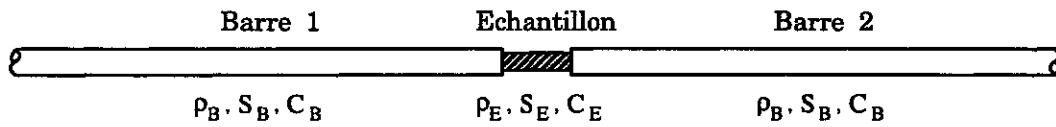


Figure 2.1 : Barres semi-infinies

de l'échantillon. $T = L_E/C_E$ est appelé temps de transfert de l'échantillon ; il correspond au temps mis par une onde pour traverser l'échantillon.

La recherche de la solution élémentaire consiste à imposer, à $t = 0$, sur la face entrante de l'échantillon un pic d'ébranlement (dirac) d'intensité (v_0, f_0) venant des x négatifs en traversant un milieu initialement au repos (ce qui impose $f_0 = -Z_B v_0$). Ce signal incident s'écrit donc :

$$\mathcal{I} = \delta_0(t) \quad \mathcal{I} = (v_0, f_0) \mathcal{I}$$

La méthode des polaires permet de déterminer graphiquement les états successifs des faces entrantes et sortantes de l'échantillon (figure 2.2).

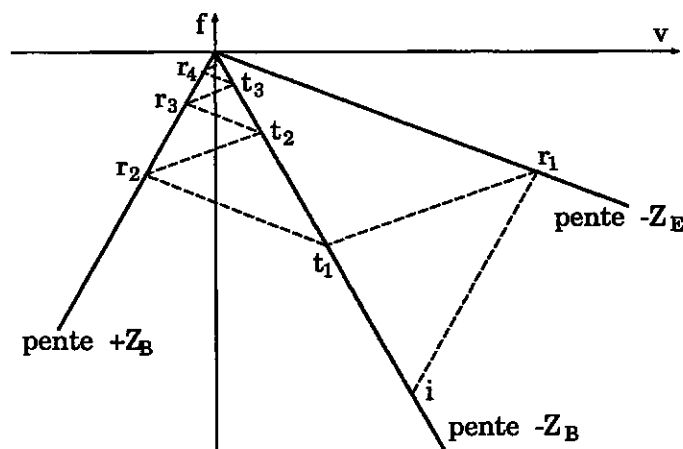


Figure 2.2 : Polaires pour le système de Hopkinson

L'état $i = (v_0, f_0)$ est le signal incident. r_n est l'état de la face entrante au temps $t = 2(n-1)T$; le signal engendré correspond à l'onde *réfléchie* dans la barre 1. t_n est l'état de la face sortante au temps $t = (2n-1)T$; le signal correspondant est l'onde *transmise* dans la

barre 2. L'état des faces entrante et sortante est donc respectivement $I + R$ et T avec :

$$\begin{cases} I + R = r_1 \delta_0 + r_2 \delta_{2T} + \dots + r_n \delta_{2(n-1)T} + \dots \\ T = t_1 \delta_T + t_2 \delta_{3T} + \dots + t_n \delta_{(2n-1)T} + \dots \\ I = i \delta_0 \end{cases}$$

La figure permet d'obtenir simplement les états successifs r_n , t_n , en progression géométrique, pour obtenir finalement :

$$R = (-v_0, f_0) \mathcal{R} \quad T = (v_0, f_0) \mathcal{T} \quad I = (v_0, f_0) \mathcal{I}$$

en posant :

$$\alpha = \frac{Z_B - Z_E}{Z_B + Z_E}$$

et avec :

- Signal incident élémentaire, sur la face entrante :

$$\mathcal{I} = \delta_0(t)$$

- Signal élémentaire transmis par la face sortante :

$$\mathcal{T} = \frac{4Z_B Z_E}{(Z_B + Z_E)^2} \sum_{p=0}^{+\infty} \alpha^{2p} \delta_{(2p+1)T}(t)$$

- Signal élémentaire réfléchi par la face entrante :

$$\mathcal{R} = -\alpha \delta_0(t) + \frac{4Z_B Z_E}{Z_B^2 - Z_E^2} \sum_{p=1}^{+\infty} \alpha^{2p} \delta_{2pT}(t)$$

On peut noter que l'on retrouve le classique changement de signe pour les vitesses particulières relatives à l'onde réfléchie.

2.3.2 Réponse dans le cas général

La réponse du système barres/échantillon à une onde incidente $\epsilon^i = f^i / E_B S_B$ est obtenue par convolution temporelle avec les noyaux \mathcal{I} , \mathcal{T} , \mathcal{R} (ϵ^i , ϵ^t , ϵ^r sont les déformations dans les barres aux niveau des faces de l'échantillon) :

$$\begin{cases} \epsilon^i = \mathcal{I} \star \epsilon^i \\ \epsilon^t = \mathcal{T} \star \epsilon^i \\ \epsilon^r = \mathcal{R} \star \epsilon^i \end{cases}$$

Cette convolution a un intérêt pratique dans la mesure où elle fournit un algorithme rapide de construction des signaux réfléchi et transmis par des opérations simples de multiplication, translation et addition réalisées sur $\epsilon^i(t)$. Les efforts sur les faces de l'échantillon sont obtenues respectivement par les relations :

$$f^{i,t,r} = Z_B C_B \epsilon^{i,t,r}$$

Considérons l'exemple instructif d'une sollicitation en échelon $\varepsilon^i(t) = \varepsilon^{max} H(t)$ (où $H(t)$ représente la fonction de Heavyside) ; ceci revient à imposer un déplacement linéaire en temps en $x = -\infty$. Plaçons nous dans le cas où l'échantillon est "plus mou" que les barres : $Z_E \leq Z_B$, soit $\alpha \in]0, 1]$ La sollicitation envisagée fait tendre le système barres/échantillon vers un état limite. Cet état d'équilibre limite correspond à un état quasi-statique pour lequel les déformations sont homogènes dans les barres ($\varepsilon = \varepsilon^{max}$) et dans l'échantillon ($\varepsilon = \frac{Z_B C_B}{Z_E C_E} \varepsilon^{max}$). En effet, on a :

$$\begin{aligned} \varepsilon^t(t) &= \mathcal{T} \star \varepsilon^i \\ &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} \varepsilon^{max} \frac{4Z_B Z_E}{(Z_B + Z_E)^2} \sum_{p=0}^{+\infty} \alpha^{2p} = \varepsilon^{max} \frac{4Z_B Z_E}{(Z_B + Z_E)^2} \frac{1}{1 - \alpha^2} = \varepsilon^{max} \\ \varepsilon^r(t) &= \mathcal{R} \star \varepsilon^i \\ &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} \varepsilon^{max} \left(-\alpha + \frac{4Z_B Z_E}{Z_B^2 - Z_E^2} \sum_{p=1}^{+\infty} \alpha^{2p} \right) = \varepsilon^{max} \left(\frac{4Z_B Z_E}{Z_B^2 - Z_E^2} \frac{1}{1 - \alpha^2} - \alpha \right) = 0 \\ \text{soit} \quad \varepsilon^i(t) + \varepsilon^r(t) &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} \varepsilon^{max} \end{aligned}$$

Cette analyse entraîne le constat suivant : les variations relatives des champs au temps t sont de l'ordre de α^{2p} avec $2pT \sim t$, soit une variation exponentiellement décroissante avec le temps caractéristique $\tau_c = -T/\log \alpha$. Ce temps caractéristique est strictement décroissant (de $+\infty$ à 0) en fonction de $Z_E/Z_B \in]0, 1]$.

Pour une sollicitation de type Heavyside "lissé", les efforts f^1 et f^2 au niveau des interfaces entre l'échantillon et la barre 1 et l'échantillon et la barre 2 présentent (figure 2.3) les variations suivantes en fonction du temps (Zhao [95]), avec en trait plein la force sortante et en pointillé la force entrante :

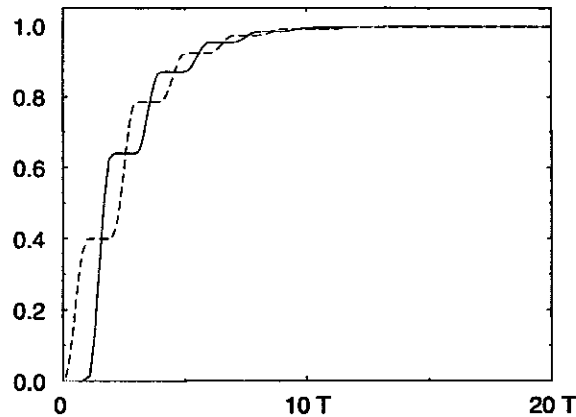


Figure 2.3 : Forces entrante et sortante

Si $Z_E \ll Z_B$, α est proche de 1 et donc τ_c est grand : l'équilibre est atteint au bout d'un temps long devant T : l'échantillon n'est pas en équilibre et les effets d'inertie restent importants (sur la durée d'observation). Si au contraire Z_E est proche de Z_B , τ_c est petit et le chargement pourra être considéré comme quasi-statique après un bref état transitoire de mise en charge (les deux courbes $f^1(t)$ et $f^2(t)$ sont pratiquement confondues). Le cas limite correspond à l'égalité des impédances : il n'y a pas de changement de l'impédance du milieu et donc pas d'onde réfléchie : tout le signal est transmis.

2.4 L'essai aux barres de Hopkinson

On rappelle que l'information de base obtenue lors d'un essai aux barres de Hopkinson est la mesure des ondes de déformation grâce à des jauges situées sur les barres entrante et sortante.

2.4.1 Relations aux interfaces barres - échantillon

Les signaux bruts obtenus aux barres de Hopkinson sont l'onde incidente $\varepsilon_i(t)$ suivie de l'onde réfléchie $\varepsilon_r(t)$, mesurées par la jauge de la barre entrante, et l'onde transmise $\varepsilon_t(t)$ enregistrée par la jauge qui équipe la barre sortante. La connaissance de ces trois ondes *au niveau des interfaces* entre les barres et l'échantillon permet d'écrire d'après la solution élastique générale (2.1) :

$$\begin{aligned} v_e(t) &= C_B (\varepsilon_i(t) - \varepsilon_r(t)) \\ v_s(t) &= C_B \varepsilon_t(t) \\ \sigma_e(t) &= \frac{S_B}{S_E} E_B (\varepsilon_i(t) + \varepsilon_r(t)) \\ \sigma_s(t) &= \frac{S_B}{S_E} E_B \varepsilon_t(t) \end{aligned} \quad (2.3)$$

où v et σ sont les vitesses et les contraintes sur les faces entrante (e) et sortante (s). On a donc accès à l'histoire du chargement $\sigma(t)$ et $v(t)$ sur les deux faces de l'échantillon. La difficulté réside alors dans la transformation des signaux bruts de jauges, mesurés donc à une certaine distance des interfaces barres-échantillon, en déformations $\varepsilon_i(t)$, $\varepsilon_r(t)$, $\varepsilon_t(t)$ sur les faces de l'échantillon.

A partir des relations (2.3) il est possible de construire, sous certaines hypothèses, une courbe de comportement $\sigma = f(\varepsilon)$. En effet, si les contraintes $\sigma_e(t)$ et $\sigma_s(t)$ sont proches (c'est à dire pratiquement égales après un temps court devant la durée de l'expérience), il y a équilibre et le chargement peut être considéré comme quasi-statique (voir figure 2.4). En supposant l'égalité des forces sur les faces entrante et sortante il est alors justifié de définir une contrainte moyenne, une vitesse de déformation moyenne et par intégration temporelle une déformation moyenne dans l'échantillon par :

$$\begin{aligned} \sigma_m(t) &= \sigma_e(t) = \sigma_s(t) \\ \dot{\varepsilon}_m(t) &= (v_s(t) - v_e(t)) / L_E \\ \varepsilon_m(t) &= \int_0^t \dot{\varepsilon}_m(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.4)$$

ce qui entraîne les relations :

$$\begin{aligned} \sigma_m(t) &= \frac{S_B}{S_E} E_B \varepsilon_t(t) \\ \varepsilon_m(t) &= \frac{2 C_B}{L_E} \int_0^t \varepsilon_r(\tau) d\tau \end{aligned}$$

On peut noter que cette approche simplifiée ne nécessite que les deux ondes $\varepsilon_t(t)$ et $\varepsilon_r(t)$, puisque l'hypothèse faite sur les forces se traduit par la relation $\varepsilon_t(t) = \varepsilon_i(t) + \varepsilon_r(t)$. Elle se justifiait du temps où les méthodes numériques n'existaient pas et où seule une intégration directe (analogique) des signaux était possible. L'approche complète dite "à trois ondes" utilise la définition suivante de la contrainte moyenne (Lindholm [70]) :

$$\sigma_m(t) = \frac{\sigma_e(t) + \sigma_s(t)}{2}$$

qui se traduit par :

$$\begin{aligned}\sigma_m(t) &= \frac{1}{2} \frac{S_B}{S_E} E_B (\varepsilon_i(t) + \varepsilon_r(t) + \varepsilon_t(t)) \\ \varepsilon_m(t) &= \frac{C_B}{L_E} \int_0^t (\varepsilon_t(\tau) + \varepsilon_r(\tau) - \varepsilon_i(\tau)) d\tau\end{aligned}\tag{2.5}$$

Adaptation d'impédance

Pour une exploitation correcte d'un essai aux barres de Hopkinson, l'adaptation d'impédance entre les barres et l'échantillon est primordiale. En effet, pour une impédance relative de l'échantillon trop faible :

- d'une part le signal transmis est de faible amplitude ce qui entraîne une mauvaise détermination des grandeurs sur la face sortante : vitesse et force sont d'amplitudes très faibles (voire noyées dans le bruit de mesure),
- d'autre part, les ondes incidente et réfléchie sont quasiment opposées mais d'amplitudes voisines ($|\varepsilon_r| \sim |\varepsilon_i|$) puisque la quasi-totalité du signal incident est réfléchi ; ceci détermine mal la force entrante.

La seule grandeur bien connue reste alors la vitesse sur la face entrante et par là, le taux de déformation moyen $\dot{\varepsilon}_m$ puisque le déplacement de la face sortante est négligeable.

2.4.2 Hypothèse quasi-statique

Cette hypothèse concerne le dépouillement classique des essais SHPB. Par exemple, les essais sur les métaux peuvent être considérés comme quasi-statiques rapides avec une bonne approximation. La compression dynamique sollicite très rapidement le métal dans son domaine plastique où la contrainte $\sigma_m(t)$ ne varie que peu : la somme $\varepsilon_i(t) + \varepsilon_r(t) + \varepsilon_t(t)$ est donc pratiquement constante (cf. (2.5)). Mais comme le chargement ε_i est proche d'un créneau (choc de l'impacteur), il est quasiment constant, donc la somme $\varepsilon_r(t) + \varepsilon_t(t)$ l'est aussi, par conséquent le taux de déformation moyen $\dot{\varepsilon}_m \propto \varepsilon_t(t) + \varepsilon_r(t) - \varepsilon_i(t)$ peut aussi être considéré comme constant durant l'essai (figure 1.2). Le résultat de cet expérience est par conséquent classiquement donné sous forme d'une courbe $\sigma = f(\varepsilon)$ à taux de déformation $\dot{\varepsilon}$ fixé. Un ensemble de courbes obtenues à diverses vitesses de déformation permet d'appréhender le comportement dynamique du métal.

La validité de l'analyse quasi-statique de l'essai SHPB a été étudiée par de nombreux auteurs. Bell (Bell [4]), par exemple, étudie l'inhomogénéité de la déformation le long de l'échantillon de façon expérimentale par une méthode de diffraction. On trouve dans Conn (Conn [25]) une analyse théorique complète des ondes dans l'échantillon, pour un comportement élastoplastique (sans effet de vitesse de déformation), et dans les barres, la corrélation expérience/simulation étant recherchée au niveau des signaux de jauges. Jahsman (Jahsman [59]) compare, pour un comportement élastoplastique *bilinéaire* et pour deux chargements types (onde incidente trapézoïdale ou triangulaire), le dépouillement classique (i.e. quasi-statique) de la dynamique *simulée* à la courbe de comportement quasi-statique.

Toutes ces analyses permettent de comprendre les limites du dépouillement quasi-statique et quand il est nécessaire de prendre en compte l'effet transitoire dans l'échantillon. Les inhomogénéités des champs mécaniques dans l'échantillon prennent dans ce cas une grande importance et celui-ci doit être considéré non pas comme un *élément matériel* mais comme une

structure à part entière qui est le siège de propagations d'ondes. Ceci pose le :

PROBLÈME D'IDENTIFICATION : Lorsque, pour un essai aux barres de Hopkinson, on ne peut décrire l'essai par une courbe $\sigma = f(\epsilon)$, paramétrée par $\dot{\epsilon}$, vitesse de déformation que l'on suppose quasiment constante durant l'essai, les effets transitoires dans l'échantillon ne peuvent plus être négligés : l'échantillon est alors considéré comme une structure dont il faut déterminer le comportement, pour décrire l'essai en question. \diamond

Cette question d'interprétation d'un essai aux barres de Hopkinson constitue le point de départ de l'étude menée dans ce mémoire. Cette étude présente d'une part le problème d'identification du comportement généralisé à d'autres types de sollicitations que celles obtenues avec le dispositif des barres de Hopkinson, pour une structure quelconque, et d'autre part, on discute la manière de déterminer ce comportement et plus particulièrement le *critère* mis en œuvre pour évaluer la pertinence de celui-ci.

2.4.3 Traitement des signaux de jauge

Au paragraphe précédent, l'analyse s'est concentrée sur l'échantillon ; il ne faut cependant pas perdre de vue le banc de test, un montage de barres de Hopkinson étant à la fois instrument de mesure et de chargement.

Le point clef est de passer de la mesure des ondes par les jauges équipant les barres aux ondes incidente, réfléchie et transmise qui arrivent ou partent des interfaces barres - échantillon, puisque de ces grandeurs dépend directement l'histoire du chargement de l'échantillon. Cet aspect a été étudié par de nombreux auteurs (Davies [31], Kolsky [63], Blanc [8], Humen, Potesil [58], Coquin [27]) et plus récemment par Gary et Zhao (Gary, Zhao [40], [97], Zhao [95]). On en rappelle donc ici brièvement le principe pour mémoire.

Pour cela, il faut commencer par *synchroniser* les trois signaux ϵ^i , ϵ^r , ϵ^t pour une origine choisie sur le signal incident (Zhao, Gary [98]). Une détermination correcte de l'instant initial relatif des trois signaux est importante pour obtenir une histoire précise du chargement, surtout dans les premiers instants, très sensibles à la synchronisation des ondes (les fronts d'ondes sont en effet *raides* et comme on s'intéresse à leur différence, une petite erreur de choix d'origine implique une erreur importante sur cette différence). La détermination de l'instant initial de chaque onde se fait en supposant le comportement de l'échantillon linéaire élastique (au moins dans les premiers instants du chargement). Avec une estimation du module d'élasticité de l'échantillon, on peut simuler les ondes réfléchie et transmise (dont on connaît alors parfaitement l'origine par référence à celle de l'onde incidente) : le zéro des ondes expérimentales est obtenu en faisant coïncider le début de ces dernières avec le début des ondes simulées.

Ensuite, il est clair que les ondes dans les barres ne peuvent rester *planes* ; il existe, en effet, des phénomènes de dispersion dus à la géométrie cylindrique des barres. La résolution de l'équation des ondes élastiques tridimensionnelles dans un barreau élastique linéaire infini (Pochhammer [80], Chree [24]) permet d'affiner considérablement le traitement "onde plane" : cette résolution fournit en effet une relation de *dispersion géométrique* obtenue dans cette résolution (l'hypothèse du barreau infini et des ondes stationnaires est licite car le rapport diamètre/longueur des barres est très petit).

D'autre part, le matériau constitutif des barres peut présenter une certaine viscosité (par exemple, des barres viscoélastiques en Nylon sont utilisées pour tester des matériaux d'impédance faible). L'équation des ondes dans un barreau infini est donc résolue dans le cadre de la viscoélasticité linéaire et fournit une relation de *dispersion visqueuse et géométrique couplées*. Il

faut noter que cette correction est, pour l'utilisation de barres visco-élastiques, essentielle (Zhao, Gary [97]).

2.4.4 Limitations du dispositif

Comme on l'a vu, le chargement obtenu avec un montage classique de barres de Hopkinson est directement lié aux dimensions des barres. L'onde incidente peut être assimilée à un créneau dont la durée τ est directement proportionnelle à la longueur de l'impacteur. La déformation maximale atteinte dans l'échantillon s'écrit :

$$\varepsilon_{max} = \alpha \tau \dot{\varepsilon}_m \quad (\alpha \leq 1)$$

où $\dot{\varepsilon}_m$ est la vitesse de déformation moyenne dans l'échantillon (directement fonction de la vitesse initiale de l'impacteur), et α un coefficient fonction de l'impédance relative de l'échantillon et des barres. La taille (longueur) du système est donc un facteur qui limite la déformation maximale susceptible d'être atteinte lors d'un test, particulièrement pour les *faibles vitesses de déformation*. Les ordres de grandeur des vitesses de déformation, pour des essais sur des métaux, se situent typiquement entre 100 s^{-1} et 1000 s^{-1} , vitesses qui permettent d'étudier la plasticité du matériau.

Une des difficultés actuelles est de réaliser des essais entre 1 s^{-1} et 100 s^{-1} , c'est à dire dans une zone de vitesses de déformation comprise entre celle des essais quasi-statiques (rapides) et celle des essais dynamiques, tout en ayant, en fin de chargement, une déformation maximale suffisamment élevée. Ce point est d'autant plus important que ce sont les vitesses de déformation rencontrées dans les structures industrielles, par exemple lors d'un crash-test d'automobile.

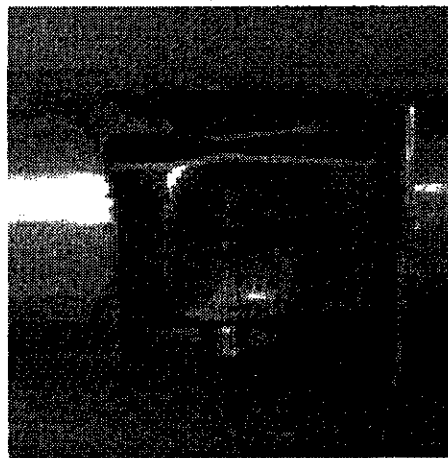


Figure 2.4 : Test d'un élément de caisse automobile

C'est pourquoi sont développés, au L.M.S., des systèmes capables de générer une onde de chargement de durée plus importante que celle obtenue avec un impacteur classique : impacteur plus long et/ou d'impédance plus élevée, utilisation d'un vérin hydraulique rapide. Ceci a pour conséquence, puisque l'on conserve la partie barre entrante + barre sortante, que les ondes incidente et réfléchie se superposent lors de leur enregistrement via la jauge sur la barre entrante et ne sont plus discernables : la difficulté est contournée par l'emploi d'un dispositif SHPB à *quatre jauges* (deux sur la barre entrante, deux sur la barre sortante) qui, par une méthode de déconvolution, permet de séparer les ondes "montante" et "descendante" dans chaque barre

(Zhao, Gary [99]). Cette méthode est aussi bien utilisée pour tester des mousses en grandes déformations (sur un montage de barres viscoélastiques de faible impédance (Zhao [95]), voir figure 1.10 au chapitre 1) que pour des essais globaux sur de petites structures de type coque, en tôle mince, représentatives de certains éléments de caisse d'automobile et utilisées pour leurs propriétés d'absorption d'énergie par flambage (Gary [39]).

Une dernière remarque concerne la façon d'imposer le chargement. Le montage de Hopkinson peut être, de ce point de vue, qualifié de "passif". En effet, contrairement à une presse hydraulique, par exemple, avec laquelle il est possible de contrôler déplacements ou efforts, les barres de Hopkinson ne permettent pas d'imposer quoique ce soit *au niveau de l'échantillon* : tout est *conséquence* de la vitesse de l'impacteur, unique paramètre ajustable une fois la géométrie de l'essai fixée.

2.5 Conclusion de la première partie

Dans un premier temps on a présenté les différents domaines de comportement d'une structure et les motivations de l'expérimentation dans le domaine particulier de la dynamique. Pour la caractérisation du comportement dynamique des matériaux, un outil bien adapté est le montage des barres de Hopkinson. L'exploitation de certains résultats expérimentaux impose de reconsidérer l'analyse usuelle : on considère l'échantillon testé non plus comme un volume élémentaire de matière (homogène) mais comme une *structure* à part entière. Cette nouvelle approche conduit nécessairement à un problème de type *inverse*, posé et résolu (de manière théorique) dans un cadre plus général que celui des barres de Hopkinson, dans la deuxième partie.

Partie II

APPROCHE THEORIQUE, PROBLEME INVERSE

3

Analyse de l'essai SHPB dans l'optique du calcul inverse

RÉSUMÉ : Dans cette section, on analyse les données expérimentales de l'essai aux barres de Hopkinson et leur traitement en vue de la détermination du comportement de l'échantillon testé. Cette analyse introduit aussi le cadre général de l'identification d'un comportement homogène développé par la suite.

3.1 Analyse des données expérimentales

Comme nous l'avons vu dans la partie précédente, la mesure brute aux barres de Hopkinson consiste en trois signaux de déformation, les ondes incidente (ϵ_i), réfléchie (ϵ_r) et transmise (ϵ_t). On peut donc se poser le problème d'identification du comportement de l'échantillon en considérant de façon globale le système barre + échantillon : le comportement des barres étant connu, celui de l'échantillon doit être tel que l'excitation du système par l'onde ϵ_i permette de retrouver les ondes réfléchie et transmise *mesurées*.

Cependant, l'analyse du dispositif des barres de Hopkinson (section 2.4) conduit à considérer comme données expérimentales les efforts F_e , F_s et les vitesses v_e , v_s sur les faces entrantes et sortantes de l'échantillon. Dans cette analyse, le système SHPB est décrit par un modèle unidimensionnel, corrigé par la prise en compte des effets tridimensionnels dans les barres. Les efforts et les vitesses au niveau de l'échantillon sont donc des données *unidimensionnelles*. Cette situation est illustrée par la figure 3.1.

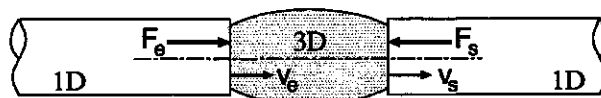


Figure 3.1 : Données sur l'échantillon

On remarque que la donnée de base est constituée de *trois* fonctions du temps ($\epsilon_i(t)$, $\epsilon_r(t)$, $\epsilon_t(t)$) à partir desquelles on construit les *quatre* fonctions $F_e(t)$, $F_s(t)$, $v_e(t)$, $v_s(t)$, en tenant compte de la proportionnalité de l'effort et de la vitesse sur la face sortante existant dans

les essais SHPB classiques. Dans un montage à *quatre* jauges (section 2.4.4), qui permet une exploitation de l'essai sur un temps supérieur au temps de transfert de la barre entrante grâce à une méthode de déconvolution (Zhao, Gary [99]), cette proportionnalité n'est plus vérifiée mais l'on construit les *quatre* signaux $F_e(t)$, $F_s(t)$, $v_e(t)$ et $v_s(t)$ à partir de *quatre* signaux de jauge. Ces remarques conduisent donc à :

- ne considérer que l'échantillon, indépendamment de la machine de chargement et de mesure que sont les barres,
- prendre comme données expérimentales les efforts F_e , F_s et les vitesses v_e , v_s sur les faces entrantes et sortantes de l'échantillon, ces quatre grandeurs étant à priori *indépendantes* et considérées comme données *unidimensionnelles*.

Dans ce qui précède on s'est intéressé aux barres mais aucune hypothèse n'a été avancée quant au caractère uni- ou tri-dimensionnel de l'échantillon. Une analyse tridimensionnelle de l'échantillon (figure 3.2) permet de considérer que l'essai donne accès aux *résultantes nor-*

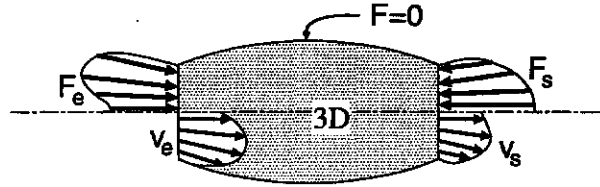


Figure 3.2 : Analyse tridimensionnelle de l'échantillon

males des efforts sur chaque face de l'échantillon ainsi qu'aux *vitesses moyennes* des faces de l'échantillon :

$$F_{e,s} = \int_{\text{face}} \underline{n} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{n} dS \quad , \quad v_{e,s} = \frac{1}{S} \int_{\text{face}} \underline{v} \cdot \underline{n} dS \quad (3.1)$$

Par ailleurs, la surface latérale de l'échantillon reste libre de contraintes. Les effets tridimensionnels dans l'échantillon sont d'une part dus au chargement qui n'est pas rigoureusement *plan* (l'onde dans la barre n'est pas plane, conséquence de la géométrie tridimensionnelle des barres) (Davies [31]) et comme pour tout contact, des efforts de *frottement* existent aux interfaces barres-échantillon. D'autre part l'*inertie radiale* dans l'échantillon doit être prise en compte.

Il est donc naturel d'examiner sous quelles conditions on peut aussi adopter une modélisation unidimensionnelle pour l'échantillon. Les effets tridimensionnels - axisymétriques, vue la géométrie du système - ont été étudiés par de nombreux auteurs (Bertholf, Karnes [5]). L'approche unidimensionnelle se justifie dans les cas suivants :

- les effets d'inertie radiale restent faibles ; leur contribution à la tenue globale de la structure est négligeable. Rappelons brièvement le raisonnement (Kolsky [62]) pour un échantillon élastique : une déformation longitudinale ϵ induit une déformation radiale $\partial u_r / \partial r = \epsilon_r = -\nu \epsilon$ dans l'hypothèse d'homogénéité pour chaque tranche de l'échantillon (ν : coefficient de Poisson). La vitesse particulière radiale est donc $v_r = -\nu r \dot{\epsilon}$ si bien que l'énergie cinétique radiale d'une tranche d'échantillon est :

$$E_c^r = \int_0^R \frac{1}{2} \rho (v_r^2) (2\pi r dr) = \frac{1}{16} \pi \rho \nu^2 R^4 \dot{\epsilon}^2$$

où ρ et R représentent respectivement la masse volumique et le rayon de l'échantillon. La contrainte longitudinale mesurée (σ_m) est *plus élevée* que la contrainte longitudinale vraie

(σ) et l'on suppose que la puissance de cette différence de contraintes contribue entièrement à l'augmentation de l'énergie cinétique radiale si bien que :

$$\int_{\text{tranche}} (\sigma_m - \sigma) \dot{\epsilon} dS = \frac{d}{dt} E_c^r$$

qui fournit la relation de correction :

$$\sigma = \sigma_m - \frac{1}{2} \rho \nu^2 R^2 \ddot{\epsilon}$$

Considérons un échantillon en acier, pour lequel $\rho = 8.10^3 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 0.3$, $R = 5 \text{ mm}$. Des valeurs courantes de contraintes et de déformations atteintes lors d'un test sont $\sigma \approx 500 \text{ MPa}$, $\dot{\epsilon} \approx 500 \text{ s}^{-1}$ avec un flanc de montée de $10 \mu\text{s}$ si bien que $\ddot{\epsilon}$ peut être majoré par 5.10^7 s^{-2} car c'est en début de chargement que les variations de $\dot{\epsilon}$ sont les plus importantes. On obtient par conséquent une correction de l'ordre de $0,5 \text{ MPa}$, très inférieure au niveau de contrainte atteint durant l'essai (l'échantillon plastifie ...).

- les frottements aux interfaces barres - échantillon sont faibles : en effet, toujours à cause de l'effet Poisson, les frottements aux interfaces barre - échantillon entraînent une déformation globale de l'échantillon "en tonneau" ; la résistance apparente est donc plus grande que la résistance effective. Une étude de Davis et Hunter (Davis, Hunter [32]) montre que l'on peut négliger ce frottement si :

$$\frac{2\mu R}{3L} \ll 1$$

où μ est le coefficient de frottement de Coulomb et L la longueur de l'échantillon. Klepaczko et Malinowski (Klepaczko, Malinowski [61]) proposent une correction globale incluant frottements et effets d'inertie radiale :

$$\sigma^{corr} = \sigma \left[1 - \frac{2\mu R}{3L} \right] - \frac{\rho}{12} [L^2 - 3R^2] \ddot{\epsilon}$$

et valable pour les matériaux métalliques présentant un comportement plastique. Lors du test on prend bien soin de lubrifier les interfaces barre - échantillon si bien que l'on suppose négligeables les effets du frottement.

L'approche la plus simple pour passer des données expérimentales de nature unidimensionnelle à l'échantillon tridimensionnel consiste à supposer le chargement homogène sur les faces (figure 3.3). Cette hypothèse n'est bien entendu pas rigoureuse mais permet d'appréhender cor-

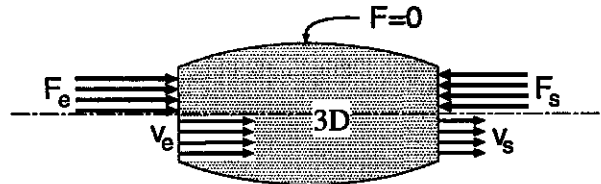


Figure 3.3 : Chargement homogène de l'échantillon

rectement les effets tridimensionnels dans l'échantillon en fournissant par exemple des conditions aux limites cohérentes dans un code de calcul.

3.2 Exploitation des données expérimentales

A ce stade, la situation est bien résumée par la figure 3.2 : un échantillon cylindrique, de comportement *inconnu* est soumis aux conditions aux limites de la figure 3.2 ; ces conditions aux limites sont expérimentalement connues par leur *résultante* ou *moyenne* (cf. relations (3.1)) à chaque extrémité de l'échantillon. La surface latérale est libre de contraintes.

L'interprétation classique de ces essais est unidimensionnelle. Le problème de non-homogénéité des efforts et vitesses sur les faces n'intervient donc plus. L'interprétation repose sur l'hypothèse de phénomène *quasi-statique rapide* c'est à dire sur l'hypothèse d'homogénéité spatiale de l'échantillon au cours du temps (la déformation peut y être considérée comme uniforme, à chaque instant). Le résultat final du dépouillement consiste alors généralement en une courbe $\sigma = f(\varepsilon)$ que l'on référence par un taux de déformation $\dot{\varepsilon}$ nominal, représentatif de l'essai, puisque celui-ci est quasiment constant au cours de l'essai.

La prise en compte, dans l'évolution de l'échantillon, des effets transitoires (effets inertiels et donc de propagation d'onde) devient cependant nécessaire lorsque la *durée de mise en équilibre* n'est pas négligeable devant la durée totale du test, et ce, quelle que soit la façon de modéliser l'échantillon (uni- ou tri-dimensionnelle). Une situation de ce type est présentée sur la figure 3.4, pour un essai réalisé sur un échantillon de sel gemme. La courbe en pointillés représente la force

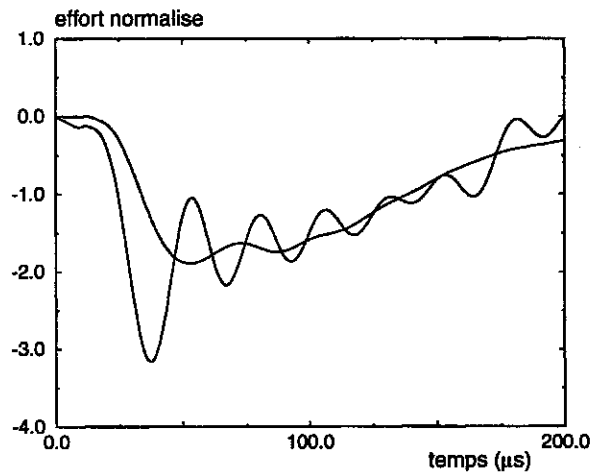


Figure 3.4 : Non équilibre des forces

(normalisée, négative en compression) sur la face entrante de l'échantillon et la courbe en trait plein celle sur la face sortante. L'interprétation d'une telle situation ne peut se passer de la prise en compte des *effets transitoires*, c'est à dire qu'il devient *nécessaire* de considérer l'échantillon comme une *structure* et non plus comme un unique volume élémentaire de matière : la simplification usuelle devient caduque.

Le but du test dynamique étant de caractériser le comportement dynamique du *matériau* constitutif de la structure, il faut faire le "lien" entre cette inconnue *locale* qu'est le comportement et les données globales sur la structure (= échantillon) que sont les efforts et les vitesses au niveau des faces de l'échantillon. Le dépouillement, dans les cas où l'hypothèse de phénomène quasi-statique rapide ne peut s'appliquer, pose donc le :

PROBLÈME D'IDENTIFICATION DU COMPORTEMENT : Connaissant l'histoire des forces et des vitesses au niveau des interfaces barres - échantillon, est-il possible de déterminer le comportement du matériau constitutif de l'échantillon ? \diamond

Pour résoudre cette question, il est nécessaire de préciser un certain nombre d'éléments : on a vu que l'interprétation des mesures pose problème, que sont exactement les mesures, qu'entend-t-on par *comportement*, qu'en est-t-il de l'existence et de l'unicité éventuelle de la solution, ... ? Ce type de problème posé par l'interprétation de l'essai SHPB relève de la catégorie des *problèmes inverses*. Il s'inscrit dans une classe plus générale de problèmes d'identification d'un comportement *homogène*, développée dans la suite. Ce cadre théorique permet d'apporter une réponse au problème d'identification et de qualifier les données expérimentales susceptibles d'apporter de l'information sur le comportement.

4

Le problème d'identification

RÉSUMÉ : On définit le *problème type*, problème d'identification d'un comportement homogène qui généralise celui posé par l'essai SHPB. La notion de *problème inverse* est introduite, le problème type faisant partie de cette classe de problèmes. Les propriétés des données expérimentales qui permettent l'identification d'un comportement sont analysées. De plus, on fixe le cadre de modélisation de la structure et de son comportement.

4.1 Généralisation du problème posé par l'essai SHPB

On considère à présent une structure constituée d'un matériau homogène. On la sollicite et sa réponse est qualifiée par diverses mesures. L'ensemble de ces mesures forme les données expérimentales. Dans le cas de l'essai SHPB, ces données sont bien sûr $F_e(t_i)$, $F_s(t_i)$, $v_e(t_i)$, $v_s(t_i)$ (les temps t_i sont les instants de mesure) mais aussi, par exemple, l'information apportée par une éventuelle prise de vue durant l'essai.

Partant de là, on se demande ce que l'on peut dire à *partir de ces données expérimentales* sur le comportement du matériau constitutif de la structure. Parallèlement, ceci revient à se demander *quelles sont les données expérimentales* nécessaires pour déterminer ce comportement.

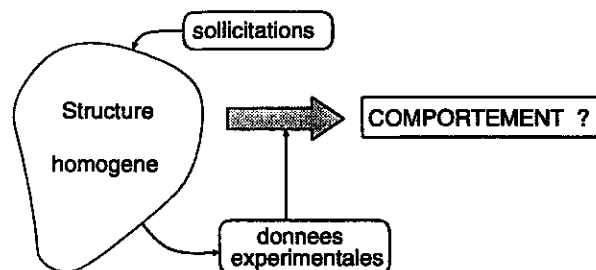


Figure 4.1 : Problème type

DÉFINITION (PT) : On appelle *problème type* le problème d'identification du comportement à partir de données expérimentales défini par la figure 4.1. \diamond

Les différents éléments de la figure 4.1 (structure et sollicitations, données expérimentales, comportement) qui *définissent* le problème type sont détaillés dans la suite.

Le problème type entre dans la catégorie des *problèmes inverses*, par opposition au *problème direct*, qui consiste dans ce cas à déterminer l'évolution de la structure, son comportement et les sollicitations étant connus. Les problèmes qui relèvent de cette catégorie des problèmes inverses sont en général bien plus délicats à résoudre que les problèmes directs dont ils sont issus. On introduit par conséquent quelques notions nécessaires pour appréhender un problème inverse.

4.2 Problématique inverse

On commence par introduire les notions de problèmes *bien* et *mal* posés, ces notions étant très liées à celle de *problème inverse*.

De façon très formelle, on entend ici par *problème* la détermination de certaines grandeurs (champs mécaniques, constantes...) notées z , appartenant à un ensemble Z , à partir de données $x \in X$, via un processus (modèle physique) défini :

$$\text{Pb} : x \in X \mapsto z \in Z$$

On qualifie ce problème de *bien posé* (au sens de Hadamard) si pour toute donnée d'entrée $x \in X$ il *existe* une *unique* solution $z \in Z$. A cette condition d'existence et d'unicité on adjoit une condition de *continuité* qui exige que deux entrées x_1 et x_2 voisines conduisent à deux réponses z_1 et z_2 voisines elles aussi. Généralement, cette hypothèse de continuité correspond à une certaine régularité du modèle physique qui régit le passage de x vers z . La notion de

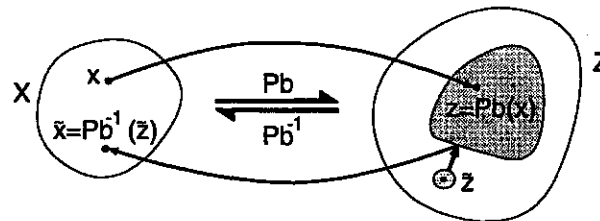


Figure 4.2 : Problèmes direct et inverse

voisinage est bien entendu subordonnée à la façon de mesurer dans les ensembles X et Z , mais une *bonne* mesure est bien souvent liée au modèle physique, comme on le constatera dans la suite. On peut par ailleurs noter que dans le cas de l'existence de solutions multiples, le problème devient bien posé en ajoutant par exemple un critère de discrimination au modèle ou en identifiant certains éléments de Z , considérés alors comme équivalents (dans un problème de bifurcation - flambage, par exemple - on ne considère que la seule solution physiquement observable).

Le problème est en revanche qualifié de *mal posé* si l'une au moins des trois conditions d'existence, d'unicité ou de continuité tombe en défaut. Ce cas de figure est fréquent lorsque l'on s'intéresse à un problème du type :

$$\text{Pb}^{-1} : z \in Z \mapsto x \in X$$

qualifié de *problème inverse* associé au *problème direct* que l'on a défini plus haut. Ce dernier est *implicitement* supposé *bien posé*. Il faut noter qu'à partir d'un problème direct on peut construire

plusieurs problèmes inverses. Par exemple dans ce mémoire, le problème direct est le problème d'évolution d'une structure : dès lors que comportement et chargement sont connus, on sait déterminer l'état de la structure à tout instant. Un comportement inconnu ou un chargement connu que partiellement conduisent à deux problèmes inverses différents mais tous deux relatifs au même problème direct.

- La *non-existence* de solution est généralement due au modèle physique reliant x à z ; en effet, l'existence d'une solution n'est acquise que si la donnée d'entrée du problème inverse z se trouve dans l'image $Pb(X)$ de l'ensemble X par le modèle (zone grisée sur la figure 4.2) ; si le modèle n'est pas suffisamment "riche", l'ensemble $Pb(X)$ ne recouvre Z qu'en partie et la solution au problème inverse n'est pas assurée pour tout élément $z \in Z$. L'élément \tilde{z} (figure 4.2) est une mesure expérimentale pour laquelle la petite boule autour de \tilde{z} représente les incertitudes de mesure. Z est supposé contenir l'image $Pb(X)$ de l'ensemble X et l'ensemble des mesures expérimentales réalisables ; la petite boule autour de \tilde{z} ne rencontre pas nécessairement dans l'image $Pb(X)$. La démarche habituelle consiste alors à construire une *quasi-solution* de $Pb^{-1}(\tilde{z})$. Pour cela, on choisit un antécédent de l'élément de $Pb(X)$ le "plus proche" de \tilde{z} ($Pb(\tilde{x})$ sur la figure 4.2). On considère que cette quasi-solution vérifie en quelque sorte "au mieux" le modèle.

Considérons par exemple un modèle linéaire sur \mathbb{R}^n ; il est entièrement déterminé par la donnée d'une matrice $A \in \mathcal{M}^n(\mathbb{R})$. Prenons comme problème direct :

$$Pb : \{x_1, \dots, x_p, A\} \in (\mathbb{R}^n)^p \times \mathcal{M}^n(\mathbb{R}) \mapsto \{x_1, Ax_1, \dots, x_p, Ax_p\} \in (\mathbb{R}^n)^{2p}$$

qui associe à un p -uplet de \mathbb{R}^n et une matrice le p -uplet et les images respectives des éléments du p -uplet par la matrice en question. Ce problème est bien posé. Un problème inverse associé consiste, par exemple, pour une série de p mesures $\{x_i, y_i\}$ à trouver la loi linéaire vérifiée par ces mesures. Sauf cas particulier et pour p assez grand, il est bien connu que ce problème n'admet pas de solution, mais que l'on peut définir une solution optimale vérifiée au mieux par l'ensemble des couples de mesures ; les méthodes classiquement utilisées pour ce type de problème linéaire sont alors les méthodes de moindres carrés, d'inversion gaussienne ou des filtres de Kalman (Bittanti, Maier, Nappi [7], Hoshiya, Saito [57], Murakami, Hasegawa [78]). La solution obtenue est qualifiée de quasi-solution puisque la compatibilité des mesures avec le modèle ne peut être vérifiée. Par ailleurs, si l'on enrichit le modèle (termes supplémentaires non linéaires), on peut réduire l'écart modèle/expérience et, par là, améliorer la quasi-solution. Pour l'exemple précédent, le modèle linéaire peut être amélioré en l'augmentant d'une correction quadratique.

- On peut pallier une éventuelle *non-unicité* de la solution en ajoutant un critère de discrimination, ce qui n'est généralement pas pénalisant (bien au contraire, s'il est construit pour éliminer des solutions physiquement non acceptables). La non-unicité peut par exemple être occasionnée par une sollicitation "incomplète" du modèle par la donnée $z \in Z$. Par exemple si on cherche à caractériser le comportement plastique d'un métal, il faut le solliciter effectivement dans la zone de comportement plastique ; dans le cas contraire, c'est à dire pour des sollicitations restant dans le domaine élastique, les caractéristiques plastiques admissibles avec les sollicitations envisagées sont quelconques et il n'y a pas unicité de la solution du problème de détermination du comportement à partir de la sollicitation en question. Il faut cependant noter que dans ce cas, une méthode de moindres carrés ou d'inversion gaussienne fournissent par construction une (quasi-) solution *unique* en fournissant par exemple, pour les paramètres relatifs à la partie plastique du comportement du matériau, un jeu de norme minimale (i.e. nul), puisque ceux-ci ne jouent aucun rôle pour les sollicitations considérées.

En reprenant le modèle linéaire et si $n > p$, la sollicitation du modèle est “incomplète” car un certain nombre d’éléments de la matrice restent indéterminés (le modèle est cependant susceptible d’être vérifié *exactement* par les données expérimentales, si l’on fait abstraction des bruits expérimentaux).

- La *continuité* de $z \in Z \mapsto x \in X$ est un point important dans la résolution du problème inverse. En effet, pour le bien fondé du modèle, il est nécessaire qu’une petite variation de la donnée d’entrée δz n’engendre qu’une faible variation δx de la solution du problème inverse. Dans la pratique, il faut considérer comme donnée la mesure expérimentale \tilde{z} avec une boule d’incertitude (figure 4.2) représentant le bruit de mesure : si la propriété de continuité n’est pas assurée, on ne peut mettre aucune confiance dans l’inversion du modèle, cette opération perdant alors tout son sens. Il faut donc rendre le problème inverse (localement) *bien posé*. L’idée consiste alors à modifier le problème inverse en le *régularisant* (Tikhonov, Arsenine [91]) : cette opération est très dépendante du type de problème mais elle correspond généralement à une légère modification du modèle, de l’espace X ou d’un compromis entre le respect du modèle initial et d’informations supplémentaires. Elle permet d’assurer la continuité du problème inverse.

Ce cas de figure peut s’observer sur un modèle linéaire s’il existe une direction propre $w_\lambda \in \mathbb{R}^n$ associée à une valeur propre λ petite (devant les autres valeurs propres). Le problème direct est alors peu sensible aux variations de x dans cette direction w_λ . Le problème inverse est, lui, très sensible dans cette même direction puisque la valeur propre associée est λ^{-1} , dont l’identification est très sensible au bruit sur les données expérimentales (erreur relative élevée sur cette composante). Dans ce cas, il peut être intéressant de reformuler le problème sur \mathbb{R}^{n-1} (i.e. le *régulariser*) en supprimant cette direction w_λ “pathologique”.

4.3 Analyse des données expérimentales

Dans le problème type d’identification décrit par la figure 4.1, l’information objective et non soumise à une quelconque modélisation est contenue dans les *données expérimentales*. Ces mesures sont la conséquence de la sollicitation de la structure : le choix pratique de l’excitation et des mesures que l’on réalise dépend de la caractérisation de la structure que l’on recherche pour en donner une modélisation dans le domaine de sollicitation considéré.

Les données expérimentales sont les suivantes. On suppose avoir accès, pour certains instants $t_i \in [0, T]$, sur des zones de la structure et notamment sur sa frontière, à des grandeurs mécaniques (efforts, déplacements, déformations) : ce sont les endroits où la sollicitation est imposée (et donc connue), et bien sûr les zones où sont placés des capteurs. Outre le fait que les mesures sont discrètes en temps (et que ce signal est bruité), elles peuvent être ponctuelles en espace (c’est à dire que la mesure se fait sur une zone suffisamment petite pour être considérée comme ponctuelle ; c’est le cas avec une jauge de déformation ou un accéléromètre) ou consister en une donnée globale relative à une portion de structure (c’est le cas lorsque l’on mesure la résultante des efforts sur un appui, comme pour l’essai aux barre de Hopkinson).

D’autre part, le chargement est bien connu et à tout instant sur certaines zones comme par exemple les surfaces libres où l’effort est nul, et, de façon analogue, les parties encastrees où le déplacement peut être considéré comme nul avec une bonne approximation. On répartit les mesures en deux catégories.

Données duales

Les données expérimentales qui sont qualifiées de duales sont celles qui, en un point ou une zone de structure associent une information en déplacement à une information en effort. Pratiquement, cela correspond à la mesure simultanée, en certains points de la structure, et sur l'intervalle de temps $t_i \in [0, T]$, d'une composante d'effort et de la composante de déplacement (ou vitesse) dans la *même direction* ; on peut noter que dans bien des cas, l'une de ces grandeurs résulte de l'application *contrôlée* de l'autre (contrôle en effort ou en déplacement, de l'expérience ; on note que ce n'est *pas* le cas du système aux barres de Hopkinson...). On peut noter que les cas limites suivants entrent dans cette catégories de données : d'une part une mesure de force réalisée au niveau d'un encastrement et d'autre part une mesure de déplacement (ou de vitesse ou d'accélération) sur une surface libre. Cette dernière situation est fréquente puisque sa réalisation expérimentale est généralement simple ; elle se rencontre notamment pour le recalage de modèles vibratoires (Ladevèze, Reynier [67], Billet [6], Zhang, Lallement, Fillod, Miranda [94]).

Pour la caractérisation du comportement, la connaissance de grandeurs duales est primordiale. Elles sont qualifiées de duales parce que leur produit (dans le Principe des Puissances Virtuelles) correspond à la puissance (ou au travail) apporté au système (au niveau de la zone considérée) lors de son évolution et donc directement reliées au comportement du matériau qui constitue la structure.

Si l'on considère une classique expérience de compression, pour laquelle on fait des hypothèses d'homogénéité et d'uniaxialité des champs mécaniques, c'est bien la donnée des déplacements et des efforts aux *deux* extrémités de l'éprouvette qui permet de tracer un diagramme (ϵ, σ) et, par là, d'appréhender le comportement du matériau constituant l'échantillon. Cette notion est très intuitive dans la mesure où, pour avoir une information sur le comportement, il faut "palper" le solide, c'est à dire estimer sa déformation relativement à sa résistance.

Données complémentaires

Les données expérimentales entrant dans cette catégorie sont en fait toutes celles "qui ne sont pas duales". Entrent donc dans cette catégorie :

- les données homogènes (nulles) issues d'une connaissance a priori des conditions sur une portion de structure (surface libre ou encastrement) et pour laquelle aucune autre mesure n'est réalisée,
- les mesures de déplacement ou de déformation sans mesure d'effort associé (ou vice versa) ; c'est le cas par exemple pour une jauge noyée dans une structure ;
- les mesures relatives à un instant donné comme, par exemple, un cliché de la structure.

Cette catégorie de données expérimentales ne contient pas d'information sur le comportement, c'est pourquoi elles sont qualifiées de complémentaires. En effet, pour faire un parallèle avec les données duales qui correspondent à une palpation, les données complémentaires seraient associées à l'unique fait de visualiser l'évolution de la structure sans mesurer l'effort (ou vice versa), ce qui n'apporte évidemment rien sur le comportement du matériau. Le cliché 1.10 en est bien entendu une bonne illustration.

4.4 Modélisations

Après ce passage en revue des données expérimentales et si l'on se réfère toujours à la figure 4.1, il est nécessaire de décrire la *structure*, du point de vue de sa géométrie, des champs

mécaniques qui y sont attachés et qui traduisent les *sollicitations*, et de définir ce que l'on entend par *comportement*.

4.4.1 Description géométrique de la structure

On se place dans le cadre de la mécanique des milieux continus. Pour décrire l'évolution de la structure considérée, on considère un espace euclidien affine \mathcal{E} de dimension 3 associé à l'espace vectoriel \mathbf{E} muni d'une base orthonormée et du produit scalaire usuel. Ceci permet d'identifier \mathbf{E} et son dual \mathbf{E}^* ainsi que leurs bases respectives ; la représentation des grandeurs vectorielles et tensorielles est donc unique et les opérations sur ces grandeurs peuvent être assimilées à des opérations matricielles.

On suppose vérifiée, dans cette étude, l'Hypothèse des Petites Perturbations (HPP), c'est à dire que l'on peut confondre les points de la configuration déformée, à l'instant t , avec leurs points homologues dans la configuration initiale et que les déformations du milieu restent petites. On note de façon générique Ω le domaine occupé par la structure.

Les notations utilisées pour les grandeurs cinématiques attachées à la structure sont $\underline{u}(x, t)$, pour le déplacement du point $x \in \Omega$ à l'instant $t \in [0, T]$, et $\underline{v}(x, t) = \frac{d\underline{u}}{dt}$, pour la vitesse de ce même point.

On définit par ailleurs l'opérateur de déformation associant à un champ de vecteurs $\underline{w}(x)$ sur Ω le champ tensoriel d'ordre 2 (dans $\mathbf{E} \otimes \mathbf{E}$, défini sur Ω) :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{w}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \underline{w}}{\partial x} + \frac{\partial \underline{w}^t}{\partial x} \right) = \underline{\underline{\text{grad}}}^{(\text{sym})} \underline{w}(x)$$

qui permet de définir le taux de déformation sur Ω par :

$$\underline{\underline{d}}(x, t) = \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{v}(x, t)]$$

4.4.2 Modélisation des efforts

A partir de cette construction géométrique, on introduit la modélisation des efforts par dualité grâce au *Principe des Puissances Virtuelles* qui traduit l'équilibre (dynamique) de la structure, soumise à des efforts et assujettie à certains déplacements. L'espace vectoriel des mouvements virtuels en chaque point est l'espace vectoriel \mathbf{E} ; il contient donc de façon certaine les vitesses associées aux mouvements réels de la structure ainsi qu'aux mouvements rigidifiants pour la structure. On note $\underline{v}^* = \underline{v}^*(x | x \in \Omega)$ les champs de vitesses virtuelles Ω . On écrit le Principe des Puissances Virtuelles :

$$\forall \underline{v}^* \in \mathbf{E}, \quad \mathcal{P}_i(\underline{v}^*) + \mathcal{P}_e(\underline{v}^*) = \mathcal{P}_a(\underline{v}^*) \quad (4.1)$$

avec $\mathcal{P}_a(\underline{v}^*)$ puissance virtuelle des efforts d'accélération, $\mathcal{P}_e(\underline{v}^*)$ puissance virtuelle des efforts extérieurs et $\mathcal{P}_i(\underline{v}^*)$, puissance virtuelle des efforts intérieurs, mise en jeu uniquement lors d'une déformation du milieu continu et qui reste nulle pour tout mouvement rigidifiant.

Le choix de l'espace fonctionnel des vitesses virtuelles détermine par dualité l'espace fonctionnel auquel appartiennent les efforts modélisés. De façon générale, l'espace des mouvements virtuels doit contenir les taux de mouvements réels à chaque instant, ce qui assure (par dualité) que les puissances mises en jeu à *chaque instant* restent finies ; les conditions de régularité temporelle des champs mécaniques sont choisies de manière à ce que les *énergies* associées à ces champs soient bornées. Les termes du PPV s'explicitent comme suit :

- la puissance virtuelle des efforts d'accélération modélise les efforts d'inertie dans la structure et donc la répartition de masse dans celle-ci :

$$\mathcal{P}_a(\underline{v}^*) = \int_{\Omega} \rho \underline{\gamma} \cdot \underline{v}^* d\Omega \quad (4.2)$$

où $\rho = \rho(x, t)$ est la masse volumique de la structure au point courant x et $\underline{\gamma} = \underline{\gamma}(x, t)$ l'accélération particulaire.

- la puissance virtuelle des efforts intérieurs s'écrit :

$$\mathcal{P}_i(\underline{v}^*) = - \int_{\Omega} \underline{\sigma} : \underline{d}^* d\Omega \quad (4.3)$$

avec $\underline{\sigma}$ tenseur des contraintes de Cauchy et $\underline{d}^* = \underline{\varepsilon}(\underline{v}^*)$ taux de déformation virtuel. Cette écriture est imposée par le choix d'une description *locale* des efforts (en fait, du comportement, voir paragraphe 4.4.3) : ils ne dépendent que de la cinématique au voisinage du point matériel considéré. Dans le champ de vitesse réel \underline{v} , $\mathcal{P}_i(\underline{v})$ représente la puissance nécessaire pour déformer la structure ; elle contient l'information sur le *comportement* du matériau constitutif de la structure.

- les efforts extérieurs sont de deux natures : il peuvent être volumiques (actions à distance de densité \underline{f}) et s'appliquer sur les éléments de matière ou s'appliquer sur la surface extérieure de la structure (densité surfacique \underline{T} , conséquence des actions de contact du milieu extérieur sur la structure). La puissance virtuelle des efforts extérieurs s'écrit :

$$\mathcal{P}_e(\underline{v}^*) = \int_{\Omega} \underline{f} \cdot \underline{v}^* d\Omega + \int_{\partial\Omega} \underline{T} \cdot \underline{v}^* dS \quad (4.4)$$

4.4.3 Comportement

Dans les sections précédentes ont été présentés le cadre cinématique d'une part et la description par dualité des efforts dans la structure d'autre part. Ces deux groupes d'équations ne suffisent pas pour déterminer les champs mécaniques lors du chargement de la structure. Il est nécessaire de leur adjoindre des relations qui décrivent les propriétés du milieu considéré c'est à dire la façon qu'a la matière de réagir aux actions mécaniques. Ce sont les *relations de comportement* ou *équations constitutives*. Ces relations font donc le lien entre les grandeurs cinématiques et les efforts. Dans le Principe des Puissances Virtuelles, c'est le terme \mathcal{P}_i des efforts intérieurs, relatif à la nature du milieu, qui se trouve précisé par la donnée du comportement : le comportement constitue une relation entre les contraintes et les déformations à tout instant, en un point donné (dans l'hypothèse du principe d'action locale).

Forme du comportement

Dans un premier temps, on note par q le vecteur des variables cinématiques ou de déformation et par Q le vecteur des variables d'effort associées (c'est à dire que le produit $Q \cdot \dot{q}$ représente la puissance de déformation mise en jeu dans le processus - \dot{q} représente la dérivée temporelle de $q(t)$). On utilise à dessein une notation qui ne précise pas ce que sont déformation et contrainte ; elle représente aussi bien une déformation d'une particule du milieu (respectivement une contrainte) qu'une grandeur cinématique (respectivement une force) globale à laquelle on aurait accès lors d'une expérience.

Les lois les plus simples sont bien entendu représentées par des lois linéaires entre Q et q (élasticité), entre Q et \dot{q} (viscosité). Si les deux phénomènes entrent en jeu, on écrira une

relation $Q = f(q, \dot{q})$ et en prolongeant ce raisonnement on peut imaginer faire intervenir les dérivées successives $Q, \dot{Q}, \ddot{Q}, \dots$ et $q, \dot{q}, \ddot{q}, \dots$ pour obtenir une relation de comportement de la forme :

$$f(q, \dot{q}, \ddot{q}, \dots, Q, \dot{Q}, \ddot{Q}, \dots) = 0$$

Mais bien souvent, ce type de formulation se révèle insuffisant ; en effet, l'expérience fournit de nombreux cas pour lesquels c'est tout le trajet de chargement qui influence le comportement à l'instant actuel : il est donc nécessaire de tenir compte de l'*histoire* du chargement sur l'intervalle de temps $] -\infty, t[$ en plus des valeurs à l'instant t , $q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t), \dots$ et $Q(t), \dot{Q}(t), \ddot{Q}(t), \dots$, indépendantes de cette histoire. On écrit donc a priori le comportement sous la forme fonctionnelle ¹ :

$$f(q(\tau|_{\tau \in]-\infty, t[}), Q(\tau|_{\tau \in]-\infty, t[}), q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t), \dots, Q(t), \dot{Q}(t), \ddot{Q}(t), \dots) = 0$$

dans laquelle la dépendance fonctionnelle peut faire intervenir la fonction elle même, mais aussi l'une quelconque de ses dérivées, s'il existe une dépendance horaire du trajet de chargement. Cette écriture n'a cependant d'intérêt que si l'on peut (par intégration) exprimer q en fonction de Q ou vice versa c'est à dire :

$$Q(t) = f(q(\tau|_{\tau \in]-\infty, t[}), q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t), \dots)$$

et, en tenant compte du *principe de non dualité* :

$$q(t) = f(Q(\tau|_{\tau \in]-\infty, t[}), Q(t))$$

Ce principe de non dualité, introduit par Mandel (Mandel [76]), relève du fait qu'il n'existe pas de phénomène dual de la viscosité : si $Q(t)$ peut dépendre de l'histoire de q ainsi que de ses dérivées successives à l'instant t , il n'en est pas de même pour $q(t)$ qui, en plus de sa dépendance de l'histoire de Q , ne peut dépendre que de la seule valeur actuelle $Q(t)$.

Cette formulation du comportement est la seule qui soit entièrement rigoureuse. Son inconvénient majeur est de ne pas être pratiquement utilisable à cause de la dépendance fonctionnelle en l'histoire du chargement. C'est pourquoi, cette dépendance est souvent remplacée par un jeu de variables *internes* (noté α), dont la connaissance à l'instant t représente avec une bonne approximation l'histoire jusqu'à cet instant. Cette formulation nécessite bien entendu l'introduction de lois *complémentaires* qui décrivent l'évolution de ces variables internes au cours du processus :

$$Q(t) = f(q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t), \dots, \alpha(t)) \quad , \quad \dot{\alpha}(t) = h(q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t), \dots, \alpha(t))$$

L'hypothèse du matériau standard généralisé (Halphen, Nguyen [53]) entre dans ce cadre. On s'y donne, en effet, un potentiel énergie (libre) $\Psi(q, \alpha)$ duquel dérivent les efforts Q et les *forces internes* A associées aux variables internes :

$$Q = \frac{\partial \Psi}{\partial q} \quad , \quad A = \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}$$

L'introduction d'un second potentiel (de dissipation) $\phi(Q, A)$ permet de décrire l'évolution des variables internes :

$$\dot{\alpha} = \frac{\partial \phi}{\partial A}$$

Dans le cas où l'on prend en compte la température, on ajoute cette variable comme coordonnée supplémentaire du vecteur q , la variable duale étant alors l'entropie (ajoutée au vecteur Q).

¹le terme " f " est ici utilisé de façon générique et désigne une fonction ou une fonctionnelle de ses arguments

Conditions sur la forme du comportement

Les premières écritures proposées dans le paragraphe précédent sont issues d'une approche expérimentale. La formulation du comportement doit cependant vérifier un certain nombre de principes physiques et la signification de q et Q doit être précisée.

On suppose que le matériau vérifie le *principe d'action locale*, c'est à dire que la relation de comportement au niveau d'une particule de matière ne fait intervenir que les interactions avec les particules de son voisinage. Le matériau est de plus supposé *matériellement simple*, c'est à dire que dans la formulation du comportement le vecteur q , contenant l'information cinématique, représente la déformation de l'élément de matière. Par dualité, le vecteur Q correspond au tenseur des contraintes $\underline{\sigma}$.

Le matériau doit présenter une certaine *stabilité* dans un voisinage de son état naturel : dans la mesure où il est possible de définir une énergie libre, celle-ci doit être convexe dans ce voisinage de l'état naturel. En élasticité linéaire, par exemple, ceci se traduit par le caractère défini positif du tenseur des coefficients élastiques.

Le comportement doit de plus vérifier la condition d'*admissibilité thermodynamique*, c'est à dire ne pas violer les restrictions de dissipations (intrinsèque et thermique) positives imposées par le second principe de la thermodynamique. Dans le cas des matériaux standards (Halphen, Nguyen [53]), cette condition revient à imposer au potentiel de dissipation d'être convexe.

Quelle que soit l'écriture choisie pour le comportement, celle-ci nécessite un certain nombre n de paramètres, supposés réels et notés $\{p_i, i = 1..n\}$ dans toute la suite. On fait l'hypothèse de *continuité du comportement par rapport aux paramètres* : pour un chargement fixé, on considère l'évolution d'une structure sur un intervalle de temps $[0, T]$; les champs mécaniques sur cette structure, pour $t \in [0, T]$, obtenus avec le jeu de paramètres $\{p_i + \delta p_i\}$ restent "proches" de ceux résultant du choix des paramètres $\{p_i\}$, pourvu que les δp_i soient suffisamment petits (un cadre adéquat permettra de préciser cette notion au paragraphe 5.4.2). Concrètement, cette hypothèse traduit le fait qu'à propriétés mécaniques voisines, la réponse de deux matériaux est semblable.

NOTE : On a, à ce stade, donné un cadre à tous les acteurs de la figure 4.1 qui définit le problème type. Il faut à présent les faire interagir en introduisant un certain nombre d'"outils". \diamond

5

Outils de résolution

RÉSUMÉ : On se donne dans cette section les outils nécessaires à la résolution du problème type. Le problème type étant de nature *inverse*, la première étape consiste à poser précisément le *problème direct*. Ensuite, on introduit le *problème type idéalisé*, qui permettra la résolution du problème type.

5.1 Le problème direct

Ce premier et peut être le plus important des outils est la résolution du problème direct dont est issu le problème type, de nature *inverse*. Il est nécessaire qu'il soit bien posé (cf section 4.2).

On considère donc le problème d'évolution sur un intervalle de temps fixé $[0, T]$ d'un solide occupant le domaine Ω de \mathcal{E} . Ce problème consiste à déterminer, pour tout $t \in [0, T]$, quels sont les champs mécaniques dans la structure.

Le référentiel dans lequel on se place est supposé *galiléen* de sorte que l'accélération particulaire vaut :

$$\underline{\gamma}(x, t) = \frac{d^2 \underline{u}}{dt^2} = \underline{\ddot{u}}(x, t).$$

L'état initial de la structure à $t = 0$ est supposé libre de contraintes et la structure est au repos ; en conséquence, les champs mécaniques sont tous nuls à $t = 0$. On note $\{\partial\Omega^v, \partial\Omega^f\}$ une *partition* de la frontière $\partial\Omega$ de Ω .

1. Les conditions aux limites du problème d'évolution sont imposées de la façon suivante :

A. vitesse imposée à chaque instant sur $\partial\Omega^v$:

$$\underline{v}(x, t) = \underline{v}^d(x, t) \quad \text{sur} \quad \partial\Omega^v$$

B. effort imposé à chaque instant sur $\partial\Omega^f$:

$$\underline{T}(x, t) = \underline{\underline{\sigma}}(x, t) \cdot \underline{n} = \underline{T}^d(x, t) \quad \text{sur} \quad \partial\Omega^f$$

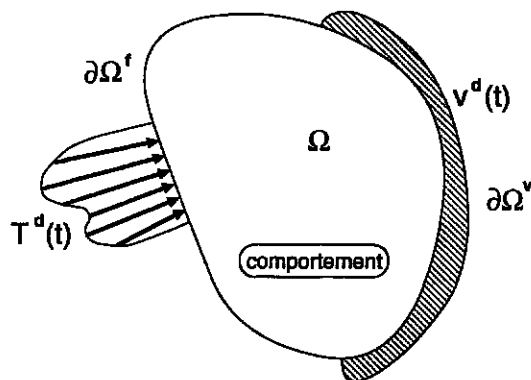


Figure 5.1 : Problème direct

2. L'équilibre dynamique de la structure à chaque instant est assuré par le Principe des Puissance Virtuelles :

$$\forall \underline{v}^* \in \mathbf{E}, \quad \forall t \in [0, T], \quad \underbrace{- \int_{\Omega} \underline{\sigma} : \underline{d}^* d\Omega}_{\mathcal{P}_i(\underline{v}^*)} + \underbrace{\int_{\partial\Omega} \underline{T} \cdot \underline{v}^* dS}_{\mathcal{P}_e(\underline{v}^*)} = \underbrace{\int_{\Omega} \rho \underline{\gamma} \cdot \underline{v}^* d\Omega}_{\mathcal{P}_a(\underline{v}^*)} \quad (5.1)$$

où $\underline{d}^*(x) = \underline{\varepsilon}[\underline{v}^*(x)]$ est le taux de déformation virtuelle associée au champ de vitesses virtuelles \underline{v}^* , et où l'on a supposé, comme dans toute la suite, négligeables les efforts de volume.

3. A ces deux groupes d'équations, à savoir les *équations de liaison* (conditions aux limites sur la frontière à chaque instant) et l'*équilibre* (Principe de Puissance Virtuelles) il faut, pour que le problème d'évolution ait un sens, introduire les propriétés du matériau constitutif de la structure c'est à dire les relations de *comportement* liant les efforts intérieurs à la déformation du milieu.

Sous les conditions des points 1, 2, 3, et dans un cadre fonctionnel adéquat, ce problème d'évolution est généralement bien posé, sous réserve de certaines propriétés des relations de comportement. Ces propriétés du comportement sont examinées dans la suite et on les suppose vérifiées.

DÉFINITION (PD) : On appelle *problème direct* le problème d'évolution *bien posé* défini par les points 1, 2, 3 ci-dessus ¹. \diamond

5.2 Etude du problème direct

On examine dans cette section quelques propriétés de la solution du problème direct. Ces propriétés sont bien entendu développées en vue de la résolution du problème type.

¹c'est à dire que ce n'est pas n'importe quel problème d'évolution mais bien celui qui vérifie ces *trois* points. Par exemple, le problème de Cauchy décrit dans la suite est *aussi* un problème d'évolution mais ne constitue *pas* un problème *direct* au sens de cette définition.

5.2.1 Unicité de la solution

Pour prouver, entre autres, l'unicité de la solution du problème direct, il est utile de donner une formulation intégrée en temps du Principe des Puissances Virtuelles. Cette formulation intégrée en temps permet une approche globale du processus d'évolution de la structure. Puisque l'on se place dans l'Hypothèse des Petites Perturbations, le domaine Ω sur lequel portent les intégrales dans le Principe des Puissances Virtuelles est invariant ; la sommation en temps est alors possible.

L'unicité de la solution du problème direct s'obtient alors en comparant deux chemins d'évolution a priori distincts de la même structure, sur le même intervalle de temps $[0, T]$ et bien entendu en partant d'états initiaux identiques. On donne les indices (1) et (2) aux deux évolutions considérées. Choisissons à chaque instant comme champ de vitesses virtuelles la différence des champs de vitesses des deux évolutions : $\underline{v}^*(x) = \underline{v}^1(x, t) - \underline{v}^2(x, t)$; le taux de déformation virtuel est alors $\underline{d}^*(x) = \underline{e}[\underline{v}^*(x)] = \underline{\dot{e}}^1(x, t) - \underline{\dot{e}}^2(x, t)$ et le PPV s'écrit ($i = 1, 2$) :

$$\int_{\partial\Omega} \underline{T}^i \cdot (\underline{v}^1 - \underline{v}^2) dS = \int_{\Omega} \underline{\sigma}^i : (\underline{\dot{e}}^1 - \underline{\dot{e}}^2) d\Omega + \int_{\Omega} \rho \underline{\gamma}^i \cdot (\underline{v}^1 - \underline{v}^2) d\Omega$$

de sorte que par différence des relations obtenues pour $i = 1$ et $i = 2$, il vient :

$$\int_{\partial\Omega} (\underline{T}^1 - \underline{T}^2) \cdot (\underline{v}^1 - \underline{v}^2) dS = \int_{\Omega} (\underline{\sigma}^1 - \underline{\sigma}^2) : (\underline{\dot{e}}^1 - \underline{\dot{e}}^2) d\Omega + \int_{\Omega} \rho (\underline{\gamma}^1 - \underline{\gamma}^2) \cdot (\underline{v}^1 - \underline{v}^2) d\Omega$$

relation qu'il est possible d'intégrer sur $[0, t]$ ($\forall t \leq T$) pour obtenir la relation globale :

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\partial\Omega} (\underline{T}^1 - \underline{T}^2) \cdot (\underline{v}^1 - \underline{v}^2) dS d\tau = \\ \int_0^t \int_{\Omega} (\underline{\sigma}^1 - \underline{\sigma}^2) : (\underline{\dot{e}}^1 - \underline{\dot{e}}^2) d\Omega d\tau + \int_0^t \int_{\Omega} \rho (\underline{\gamma}^1 - \underline{\gamma}^2) \cdot (\underline{v}^1 - \underline{v}^2) d\Omega d\tau \end{aligned}$$

On peut évaluer exactement l'intégrale par rapport au temps dans le dernier terme :

$$\int_0^t \rho (\underline{\gamma}^1 - \underline{\gamma}^2) \cdot (\underline{v}^1 - \underline{v}^2) d\tau = \frac{1}{2} \rho (\underline{v}^1 - \underline{v}^2)_{(t)}^2$$

puisque $\underline{\gamma}^i = \frac{d\underline{v}^i}{dt}$, ce qui conduit donc à :

$$\boxed{\begin{aligned} \int_0^t \int_{\partial\Omega} (\underline{T}^1 - \underline{T}^2) \cdot (\underline{v}^1 - \underline{v}^2) dS d\tau = \\ \int_0^t \int_{\Omega} (\underline{\sigma}^1 - \underline{\sigma}^2) : (\underline{\dot{e}}^1 - \underline{\dot{e}}^2) d\Omega d\tau + \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho (\underline{v}^1 - \underline{v}^2)_{(t)}^2 d\Omega \end{aligned}} \quad (5.2)$$

Pour prouver l'unicité de la solution, supposons qu'il existe deux évolutions (1) et (2) distinctes mais relatives à la même histoire de conditions aux limites :

$$\underline{v}(x, t) = \underline{v}^d(x, t) \quad \text{sur} \quad \partial\Omega^v$$

$$\underline{T}(x, t) = \underline{T}^d(x, t) \quad \text{sur} \quad \partial\Omega^f$$

Ceci entraîne la nullité du premier membre de l'équation (5.2) puisque $\underline{v}^1 = \underline{v}^2$ sur $\partial\Omega^v$ et $\underline{T}^1 = \underline{T}^2$ sur $\partial\Omega^f$. L'équation (5.2) s'écrit alors :

$$\int_0^t \int_{\Omega} (\underline{\sigma}^1 - \underline{\sigma}^2) : (\underline{\dot{e}}^1 - \underline{\dot{e}}^2) d\Omega d\tau + \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho (\underline{v}^1 - \underline{v}^2)_{(t)}^2 d\Omega = 0 \quad (5.3)$$

Pour obtenir l'unicité de l'évolution de la structure, on introduit la condition de *stabilité du matériau au sens de Drucker* (Drucker [33]). Cette hypothèse s'annonce de la manière suivante :

HYPOTHÈSE (H) : le comportement du matériau constituant la structure vérifie la condition de stabilité au sens de Drucker si :

$$\forall x \in \Omega \quad , \quad \forall t \in [0, T] \quad , \quad \int_0^t (\underline{\sigma}^1 - \underline{\sigma}^2) : (\underline{\dot{\varepsilon}}^1 - \underline{\dot{\varepsilon}}^2) d\tau \geq 0$$

pour tout couple d'évolutions de la structure (en partant d'un même état initial). Cette condition est vérifiée au sens strict si, lorsque l'inégalité ci-dessus devient une égalité et que $\underline{\varepsilon}^1 = \underline{\varepsilon}^2 = \underline{0}$ à $t = 0$, les deux évolutions considérées sont nécessairement identiques. \diamond

Sous cette hypothèse, qui correspond à une hypothèse de *monotonie* du comportement, la relation (5.3) entraîne :

$$\forall t \in [0, T] \quad \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho (\underline{v}^1 - \underline{v}^2)_{(t)}^2 d\Omega \leq 0$$

ce qui équivaut à :

$$\forall t \in [0, T], \forall x \in \Omega \quad \underline{v}^1(x, t) = \underline{v}^2(x, t)$$

et prouve l'unicité de la solution en *déplacement* puisque l'état initial a été supposé identique pour les deux évolutions (l'intégration en temps de la vitesse permettant de remonter aux déplacements). Ensuite, par dérivation, les histoires des déformations $\underline{\varepsilon}^1(x, t) = \underline{\varepsilon}^2(x, t)$ sont identiques et, via la relation de comportement, les histoires des efforts dans la structure le sont aussi.

RÉSULTAT : sous l'hypothèse de monotonie (H), la solution du problème direct d'évolution est *unique*. \diamond

L'idée de "stabilité" est très intuitive dans cette condition puisque, traduisant l'unicité de la solution, elle empêche toute bifurcation éventuelle de la solution du problème d'évolution.

Il faut noter que l'hypothèse de monotonie faite sur le comportement couvre dans la pratique une large classe de matériaux ; en effet, de façon élémentaire, l'inégalité de monotonie traduit le constat expérimental selon lequel plus les efforts appliqués sur une structure sont importants, plus les déformations et vitesses de déformations sont grandes (et vice versa). La condition de stabilité au sens de Drucker correspond à cette propriété vérifiée par un élément de matière quelconque.

5.2.2 Equivalence des conditions aux limites

Dans le problème direct, pour lequel les vitesses sont données sur $\partial\Omega^v$ et les efforts sur $\partial\Omega^f$, on détermine, entre autres, les quantités *duales* sur la frontière à savoir les efforts sur $\partial\Omega^v$ et les vitesses sur $\partial\Omega^f$. On se demande alors ce que devient la solution de ce problème si l'on change de partition $\{\partial\Omega^v, \partial\Omega^f\}$. Ceci revient, de manière plus directe, à se poser la

QUESTION : Peut-on imposer de façon équivalente les efforts ou les vitesses dans le problème direct ? \diamond

Fixons une partition $\{\partial\Omega^v, \partial\Omega^f\}$. La résolution du problème d'évolution (solution (1)) donne accès au couple $(\underline{v}, \underline{T})$ sur toute la frontière. Ces champs, à présent considérés comme données, permettent de construire une deuxième solution (2) si l'on se donne une partition $\{\partial\tilde{\Omega}^v, \partial\tilde{\Omega}^f\}$ de $\partial\Omega$ différente de la première. Dans le Principe des Puissance Virtuelles, le terme :

$$\int_{\partial\Omega} (\underline{T}^1 - \underline{T}^2) \cdot (\underline{v}^1 - \underline{v}^2) dS d\tau$$

est alors toujours nul. En effet, sur $\partial\Omega^v \cap \partial\tilde{\Omega}^v$ et sur $\partial\Omega^f \cap \partial\tilde{\Omega}^f$ on impose respectivement les mêmes vitesses et les mêmes efforts donc l'un des termes de l'intégrale est nul. Sur $\partial\Omega^v \cap \partial\tilde{\Omega}^f$ les efforts imposés dans le problème (2) sont ceux obtenus dans la résolution du problème (1) par conséquent $\underline{T}^1 - \underline{T}^2$ est nul sur cette portion de frontière. De la même façon, on trouve que le terme $\underline{v}^1 - \underline{v}^2$ est nul sur $\partial\Omega^f \cap \partial\tilde{\Omega}^v$. On est par conséquent ramené au problème d'unicité de la solution du problème d'évolution (relation (5.3) vérifiée), d'où le :

RÉSULTAT : sous l'hypothèse (H), il est *équivalent* dans le problème direct d'imposer des conditions aux limites en effort ou en vitesse. \diamond

Ceci explique le terme de “condition de *stabilité*” employé ci-dessus. En effet, imaginons une expérience de compression simple. Le résultat précédent permet d'affirmer qu'il est possible, en supposant l'hypothèse (H) vérifiée, de piloter cette expérience de *façon équivalente* en effort ou en déplacement. Concrètement, on sait que cette affirmation reste valable tant que le matériau est durcissant c'est à dire tant que la pente de la courbe effort déplacement reste positive ; dans le cas contraire, le pilotage en effort conduit à la ruine de la structure, qui peut s'interpréter comme une instabilité.

5.2.3 Opérateur Dirichlet-Neumann

Le résultat obtenu précédemment repose sur la monotonie du comportement. La formulation intégrée du Principe des Puissances Virtuelles (5.2) implique, dans le cadre de l'hypothèse (H), la positivité du terme :

$$M(t) = \int_0^t \int_{\partial\Omega} (\underline{T}^1 - \underline{T}^2) \cdot (\underline{v}^1 - \underline{v}^2) dS d\tau \geq 0$$

pour tout instant $t \in [0, T]$ et pour tout couple (1) et (2) d'évolutions.

La quantité $M(t)$ ne dépend que des termes d'effort et de vitesse sur la frontière ; sa positivité traduit donc les conséquences de la monotonie du comportement *au niveau de la surface de la structure* (on rappelle qu'un opérateur $A : E \rightarrow E$ est *monotone* si pour tout couple $(u, v) \in E^2$ on a $(Au - Av) \cdot (u - v) \geq 0$; on a noté \cdot le produit scalaire dans E). Cette monotonie n'est autre que celle de l'opérateur Dirichlet-Neumann, qui, pour une structure donnée relie les déplacements de la frontière et les efforts qui y sont appliqués :

$$DN : \{\underline{v}(x, t), x \in \partial\Omega, t \in [0, T]\} \mapsto \{\underline{T}(x, t), x \in \partial\Omega, t \in [0, T]\}$$

Dans la relation (5.2) le dernier terme :

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho (\underline{v}^1 - \underline{v}^2)_{(t)}^2 d\Omega \geq 0$$

s'interprète comme une énergie cinétique associée à l'écart entre les deux évolutions. La positivité de ce terme pour tout instant $t \in [0, T]$ fait que l'on ne peut avoir équivalence entre monotonie du

comportement et monotonie de l'opérateur Dirichlet-Neumann, puisque dans ce cas, la positivité de $M(t)$ n'entraîne *pas* la monotonie du comportement.

Si l'on considère une évolution quasi-statique, le terme d'énergie cinétique disparaît : l'unicité de la solution et la propriété d'équivalence des conditions aux limites en effort et en vitesse qui en découle sont dans ce cas assurées par la condition de stabilité au sens strict. En élasto-statique (isotrope inhomogène), par exemple, le temps n'intervient pas explicitement et on montre que la donnée de l'opérateur Dirichlet-Neumann est équivalente à la donnée du comportement (Constantinescu [26]), grâce au PPV et à une relation de polarisation de la fonctionnelle d'énergie élastique liant grandeurs de volume et grandeurs sur la surface.

Ceci amène à penser que l'hypothèse de monotonie de l'opérateur Dirichlet-Neumann est plus *faible* que l'hypothèse (H) de monotonie du comportement. Dans le Principe des Puissances Virtuelles (5.2), le terme relatif au comportement ne prend bien entendu pas en compte les effets d'inertie ; ceux-ci ont cependant une grande importance dans la tenue de la structure sous sollicitation *dynamique*. Ce sont les effets d'inertie qui expliquent la différence entre les propriétés de monotonie de DN et du comportement.

Dans le cas du flambage dynamique par exemple (Gary [39]), les effets inertiels ont un effet stabilisateur pour la structure et ils retardent l'instant de ruine. Cet aspect prend toute son importance lorsqu'il s'agit de dimensionner des éléments absorbants (situés par exemple à l'avant d'un véhicule automobile) puisqu'il influence (légèrement) le seuil de flambage mais allonge significativement le plateau (à effort pratiquement constant) précédent la ruine de la structure (figure 5.2). Faire l'hypothèse de monotonie pour l'opérateur Dirichlet-Neumann revient donc à

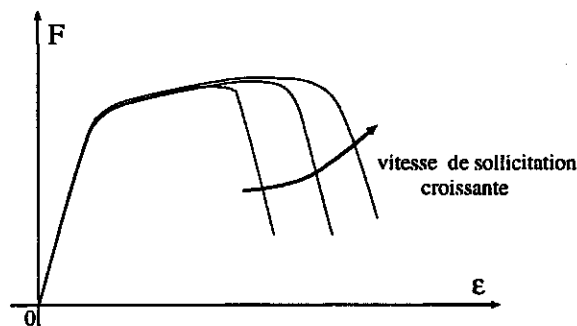


Figure 5.2 : Consolidation dynamique

considérer globalement la monotonie du comportement *plus* celle des effets inertiels.

Très schématiquement, les effets d'inertie ont pour effet de compenser, dans une certaine mesure, un comportement "radoucissant" si bien qu'au niveau de sa frontière, la structure peut présenter un comportement "durcissant" (sur un certain intervalle de temps, au moins) correspondant à la positivité de $M(t)$.

5.2.4 Le problème de Cauchy

L'opérateur de Dirichlet-Neumann introduit assez naturellement le problème de Cauchy. En effet, on s'intéresse à un problème d'évolution de la structure qui n'entre plus dans le cadre qui définit le problème direct (figure 5.1) : le comportement de la structure étant connu, on impose à la fois les efforts et les vitesses sur une partie $\partial\Omega^c$ de la frontière : on fixe ainsi partiellement l'application de Dirichlet-Neumann.

Dans l'espace-temps (x, t) , ce problème constitue un problème de Cauchy pour lequel les *conditions initiales* sont données sur la surface $\partial\Omega^c \times [0, T]$. Le problème étant de caractère hyperbolique, on sait qu'il est intégrable au voisinage d'une surface sur laquelle on se donne la valeur du champ cherché (ici la vitesse) ainsi qu'une dérivée de celui-ci *extérieure* à la surface (l'effort joue ici ce rôle), pourvu que cette surface ne soit pas une *surface caractéristique* (Eringen, Şuhubi [36]). Ces surfaces s'identifient ici aux *fronts d'onde* : le problème de Cauchy est donc intégrable au voisinage de $\partial\Omega^c \times [0, T]$ (qui n'est pas un front d'onde...).

Considérons, dans Ω , un sous-domaine variable Ω_s , indicé par le paramètre $s \in \mathbb{R}$ (s correspond à un "temps" auxiliaire). La variation de Ω_s par rapport à s est repérée par la "vitesse" normale de sa frontière $\psi = \frac{dP}{ds} \cdot \underline{n}$ (où P est un point de la frontière de Ω_s de normale \underline{n}) (figure 5.3). D'autre part on sait que la surface définie par $\partial\Omega_s$ (considérée à s fixé) n'est pas une

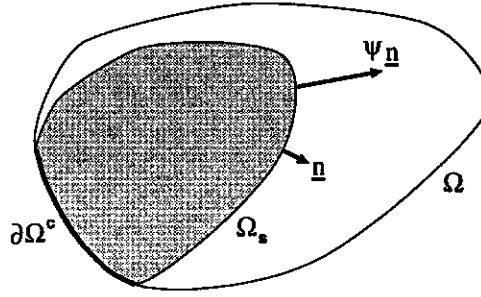


Figure 5.3 : Problème de Cauchy

surface caractéristique (Courant, Hilbert [28]). L'idée est d'exprimer la variation des champs mécaniques dans l'évolution de la surface mobile, donnée par les relations (5.4) et (5.5). Ces relations sont obtenues à partir du principe des puissances virtuelles sur le domaine Ω_s , écrit pour tout s :

$$\int_{\Omega_s} \underline{\sigma} : \nabla \underline{v}^* d\Omega + \int_{\Omega_s} \rho \ddot{\underline{u}} \cdot \underline{v}^* d\Omega = \int_{\partial\Omega_s} \underline{T} \cdot \underline{v}^* dS$$

Dans cette expression les champs mécaniques sont fonction de l'espace et du temps (de même que le champ de vitesses virtuelles \underline{v}^*). La dérivation des deux intégrales de volume par rapport au "temps" s ne font apparaître qu'un terme de flux (vitesse normale ψ), puisque l'intégrande, noté \mathcal{I} , est *indépendant* de s :

$$\frac{d}{ds} \int_{\Omega_s} \mathcal{I} d\Omega = \int_{\Omega_s} \underbrace{\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial s}}_{=0} d\Omega + \int_{\partial\Omega_s} \mathcal{I} \psi dS$$

de plus on a, pour l'intégrale de surface :

$$\frac{d}{ds} \int_{\partial\Omega_s} \underline{T} \cdot \underline{v}^* dS = \int_{\partial\Omega_s} \frac{d}{ds} (\underline{T} \cdot \underline{v}^*) + (\underline{T} \cdot \underline{v}^*) \operatorname{div}_s(\psi \underline{n}) dS$$

où div_s représente la divergence surfacique $\operatorname{div} - \underline{n} \cdot \frac{\partial}{\partial n}$; la dérivée du produit $\underline{T} \cdot \underline{v}^*$ se développe en tenant compte de :

$$\frac{d\underline{v}^*}{ds} = \frac{\partial \underline{v}^*}{\partial s} + \nabla \underline{v}^* \cdot (\psi \underline{n}) = \psi \frac{\partial \underline{v}^*}{\partial n}$$

la dérivée partielle par rapport à s étant nulle puisque \underline{v}^* est indépendante de s ; la dérivation du principe des puissances virtuelles devient alors :

$$\int_{\partial\Omega_s} \underline{\sigma} : \nabla \underline{v}^* \psi dS + \int_{\partial\Omega_s} \rho \ddot{\underline{u}} \cdot \underline{v}^* \psi dS = \int_{\partial\Omega_s} \left(\frac{d\underline{T}}{ds} + \underline{T} \operatorname{div}_s(\psi \underline{n}) \right) \cdot \underline{v}^* dS + \int_{\partial\Omega_s} \psi \underline{T} \cdot \frac{\partial \underline{v}^*}{\partial n} dS$$

Les champs-test indépendants étant \underline{v}^* et sa dérivée normale $\frac{\partial \underline{v}^*}{\partial \underline{n}}$, on introduit le gradient surfacique $\nabla_s = \nabla - \underline{n} \otimes \frac{\partial}{\partial \underline{n}}$ pour intégrer par parties le produit $\underline{\sigma} : \nabla \underline{v}^*$ et faire apparaître la dérivée normale du champ-test :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_s} \underline{\sigma} : \nabla \underline{v}^* \psi dS &= \int_{\partial\Omega_s} \underline{\sigma} : \nabla_s \underline{v}^* \psi dS + \int_{\partial\Omega_s} \underline{\sigma} : \underline{n} \otimes \frac{\partial \underline{v}^*}{\partial \underline{n}} \psi dS \\ &= - \int_{\partial\Omega_s} \left(\text{div}_s(\psi \underline{\sigma}) + 2K \psi \underline{\sigma} \cdot \underline{n} \right) \cdot \underline{v}^* dS + \int_{\partial\Omega_s} (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}) \cdot \frac{\partial \underline{v}^*}{\partial \underline{n}} \psi dS \end{aligned}$$

où K représente la courbure moyenne de la surface $\partial\Omega_s$ au point courant. L'utilisation de cette relation dans l'équation précédente du principe des puissances virtuelles dérivé par rapport à s donne :

$$\int_{\partial\Omega_s} \left(\psi \rho \ddot{\underline{u}} - \text{div}_s(\psi \underline{\sigma}) - 2K \psi \underline{\sigma} \cdot \underline{n} - \frac{dT}{ds} - \underline{T} \text{div}_s(\psi \underline{n}) \right) \cdot \underline{v}^* dS + \int_{\partial\Omega_s} \psi (\underline{\sigma} \cdot \underline{n} - \underline{T}) \cdot \frac{\partial \underline{v}^*}{\partial \underline{n}} dS = 0$$

Ainsi, l'identification des cofacteurs de $\frac{\partial \underline{v}^*}{\partial \underline{n}}$ et de \underline{v}^* fournissent respectivement la relation d'équilibre sur la frontière, $\underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{T}$, et la relation :

$$\frac{dT}{ds} = \psi \rho \ddot{\underline{u}} - \text{div}_s(\psi \underline{\sigma}) - \underline{T} \text{div}_s(\psi \underline{n}) - 2K \psi \underline{\sigma} \cdot \underline{n}$$

Le développement $\text{div}_s(\psi \underline{n}) = \psi \text{div}_s \underline{n} + \nabla_s \psi \cdot \underline{n}$ permet de transformer l'équation précédente, en tenant compte des relations géométrique $\text{div}_s \underline{n} = -2K$ et d'équilibre $\underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{T}$, en :

$$\frac{dT}{ds} = \psi \rho \ddot{\underline{u}} - \text{div}_s(\psi \underline{\sigma}) - (\nabla_s \psi \cdot \underline{n}) \underline{T} \quad (5.4)$$

La relation (5.4) permet d'incrémenter sur le front $\partial\Omega_s$ le vecteur d'effort normal \underline{T} à partir des grandeurs du second membre qui sont définies sur ce front.

Une relation supplémentaire est nécessaire pour déterminer l'évolution des champs cinématiques. Cette seconde relation est liée au comportement, qui relie (de façon bijective dans l'hypothèse (H)) l'histoire des efforts dans Ω_s à celle des déformations : comme on ne s'intéresse qu'à des grandeurs définies sur la surface constituée par le front mobile, c'est en fait l'application de Dirichlet-Neumann (pour la sous-structure définie par s fixée) qui est importante. C'est elle qui donne le comportement surfacique. En particulier, on a accès au taux de déformation normal $\frac{\partial \underline{v}}{\partial \underline{n}}$ et donc, sur le front $\partial\Omega_s$, de façon équivalente, à :

$$\frac{d\underline{v}}{ds} = \psi \frac{\partial \underline{v}}{\partial \underline{n}} \quad (5.5)$$

DÉFINITION (PC) : Ce que l'on appelle problème de Cauchy correspond à l'intégration des relations (5.4) et (5.5) sur le front mobile $\partial\Omega_s$. \diamond

En élasticité, on peut donner une expression explicite du comportement "surfacique", c'est à dire de la relation qui relie l'effort surfacique \underline{T} à la déformation normale $\frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{n}}$ (Bui [20]).

Si d'un point de vue théorique on traite ainsi la résolution du problème de Cauchy, une application pratique de cette méthode paraît beaucoup plus délicate. En effet, l'intégration des équations sur le front mobile est généralement instable, c'est à dire que pour une faible modification des données sur le front initial, les solutions obtenues peuvent être très différentes. (voir par exemple le problème du laplacien, étudié par de nombreux auteurs (Bui [20])). Le problème

de Cauchy constitue ainsi un problème d'évolution *mal posé* puisque très sensible aux perturbations des données aux limites. C'est pourquoi, il doit plutôt être considéré comme un problème *inverse*, relatif au problème direct défini en 5.1 puisqu'une régularisation est nécessaire. Une méthode de contrôle optimal par les déplacements sur la portion de frontière où aucun champ n'est prescrit permet par exemple cette régularisation (voir dans la suite).

Pour fixer les idées, on peut par exemple considérer (en quasi-statique) le principe de Saint-Venant. Considérons deux poutres chargées de façon identique mais encastrees de manière un peu différente ; au voisinage de l'encastrement les champs mécaniques sont assez différents alors qu'ailleurs ils sont quasiment égaux : des données de Cauchy dans une région éloignée de l'encastrement ne sont pas discriminantes : elles ne permettent pas de "voir" l'encastrement. L'intégration de ces données ne permet pas de reconstruire les conditions d'encastrement, qui sont à ce moment-là très sensibles au bruitage des données (d'où la nécessité d'une régularisation ou en d'autres termes de stabiliser le problème en introduisant de l'information supplémentaire).

La formulation précédente du problème de Cauchy n'exploite cependant pas le caractère hyperbolique du système différentiel régissant l'évolution de la structure, c'est à dire l'existence des surfaces caractéristiques correspondant aux fronts d'onde (contrairement au problème quasi-statique pour lequel ces surfaces n'existent pas). Dans le cas d'un système unidimensionnel (en espace), les surfaces caractéristiques deviennent des lignes caractéristiques le long desquelles il est possible de définir un invariant appelé *invariant de Riemann* et de construire ainsi les champs mécaniques à l'intersection de ces caractéristiques. Ces quantités invariantes ont pour effet de *stabiliser* la résolution du problème de Cauchy par la méthode des caractéristiques. Cette méthode est examinée plus en détails au paragraphe 7.4.1 dans le cas de propagation d'ondes dans un milieu unidimensionnel et appliqué au cas de la barre de Hopkinson.

5.3 Le problème type idéalisé

Dans la section précédente, on a explicité comment la situation pratique illustrée par la figure 3.1 pour l'essai aux barres de Hopkinson se généralise au problème *type* défini par la figure 4.1. Cependant, une analyse plus fine de l'essai SHPB, figure 3.2, montre que l'information est bien plus riche si les données expérimentales sont des données *en chaque point* et non pas des grandeurs globales sur les faces de l'échantillon.

Comme la figure 3.1 s'est généralisée au problème type, on généralise la situation, en quelque sorte idéale, de la figure 3.2 à un problème que l'on appelle le *problème type idéalisé*.

Ce problème type idéalisé est un outil pour la résolution du problème type, c'est à dire pour l'identification du comportement. Il est *défini* comme suit :

DÉFINITION (PTI) : Dans le problème *type idéalisé*, on se donne *exactement*, sans incertitudes de mesure et $\forall t \in [0, T]$ les *efforts* sur une première portion de frontière, les *vitesses* sur une autre portion de frontière. Ces deux portions de frontière sont a priori distinctes, pas obligatoirement disjointes et leur réunion n'est pas forcément la frontière entière. A partir de ces données, on cherche une solution au problème d'évolution de la structure (i.e. la détermination des champs mécaniques dans la structure, à tout instant). Le *comportement* du matériau constitutif de la structure peut, selon les cas, constituer aussi une *inconnue* du problème ou bien être *fixé*. ◊

Supposons pour commencer le comportement fixé. Le problème d'évolution (PTI) est en général mal posé, et pour plusieurs raisons. Il se déduit en effet du problème direct en *relaxant*

l'hypothèse sur les conditions aux limites qui doivent dans (PD) être imposées soit en effort, soit en déplacement et sur *toute* la frontière. Les notations sont par conséquent les mêmes que pour

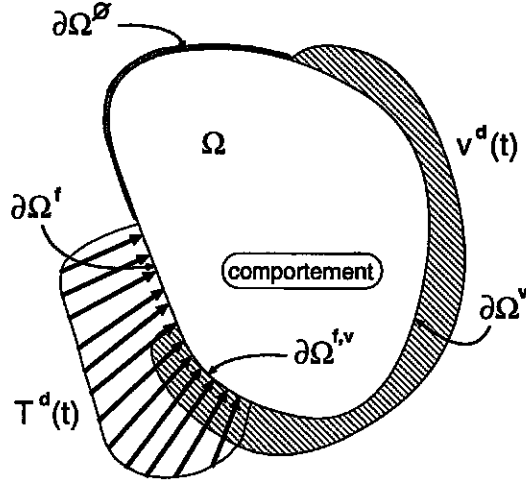


Figure 5.4 : Problème type idéalisé

le problème direct. On introduit la partition de la frontière (figure 5.4) :

$$\partial\Omega = \partial\Omega^\theta \cup \partial\Omega^v \cup \partial\Omega^f \cup \partial\Omega^{v,f} \quad (5.6)$$

telle que :

- ↪ aucune grandeur n'est donnée sur $\partial\Omega^\theta$,
- ↪ les vitesses sont données sur $\partial\Omega^v$,
- ↪ les efforts sont donnés sur $\partial\Omega^v$,
- ↪ les vitesses *et* les effort sont donnés sur $\partial\Omega^{v,f}$.

Comme on l'a déjà signalé, ce problème n'est bien posé que si $\partial\Omega^\theta = \partial\Omega^{v,f} = \emptyset$, c'est à dire lorsque l'on a affaire au problème direct. Hormis ce cas particulier, on peut distinguer :

- si $\partial\Omega^{v,f} = \emptyset$ et $\partial\Omega^\theta \neq \emptyset$ le problème est indéterminé et admet une infinité de solutions, obtenues, par exemple, en complétant, de façon arbitraire, les conditions aux limites sur $\partial\Omega^\theta$ pour construire un problème bien posé (au sens défini au paragraphe 5.1). Ce cas se présente notamment si la structure est en contact avec une autre structure (frottement, appui...) auquel cas une mesure locale est souvent impossible est seules sont accessibles des grandeurs globales (pour le cas du frottement c'est par exemple la resultante des efforts sur la surface en contact : un loi de contact permet de lever l'indétermination et de fournir une solution).
- si $\partial\Omega^{v,f} \neq \emptyset$, on a affaire à un problème de Cauchy si l'on ne prend pas en compte les données sur $\partial\Omega^v$ et $\partial\Omega^f$. Celui-ci détermine comme on l'a vu, de manière théorique au moins, les champs dans toute la structure, et en particulier les valeurs sur la portion $\partial\Omega \setminus \partial\Omega^{v,f}$ de la frontière. Ces dernières quantités ne sont a priori pas égales avec les données sur $\partial\Omega^v$ et $\partial\Omega^f$, ce qui rend ce problème généralement mal posé, au sens défini au paragraphe 4.2.

Sauf cas particulier, le problème d'évolution qu'est le (PTI) est donc mal posé. Deux types de situations se présentent qui sont dues soit à un *manque* d'information sur la frontière, ce qui autorise une infinité de solutions, soit à une *surabondance* de données sur certaines zones qui rend impossible l'existence d'une solution compatible avec la *totalité* des données. On remarque que le

problème de Cauchy (PC) constitue la situation “charnière” : il y a a priori *assez* d’information et aucune compatibilité n’est à vérifier sur la frontière puisque $\partial\Omega^v = \partial\Omega^f = \emptyset$. En tant que sous-cas, le problème de Cauchy entre dans le cadre du problème type idéalisé.

Pour construire une solution du (PTI), on va utiliser certains problèmes directs “bien choisis”, en utilisant les données aux limites, puisque, finalement, le seul problème que l’on sache résoudre est le (PD). Bien entendu, cette solution n’est pas unique puisqu’en fait on va transformer le (PTI) pour obtenir un problème *bien posé*, ce qui nécessite l’introduction d’informations supplémentaires. Pour cela, on a besoin de quelques notions de compatibilité et d’admissibilité.

5.4 Admissibilité et compatibilité

5.4.1 Admissibilité statique, cinématique et dynamique

Les deux premières notions sont des notions classiques, à savoir qu’un champ de contraintes (de Cauchy) est dit *statiquement admissible* s’il équilibre, à l’instant $t \leq T$, sur la configuration actuelle, les efforts de volume ainsi que les efforts imposés sur (une partie de) la frontière :

$$SA(t) = \{\underline{\sigma} \in H'(\Omega) \mid \operatorname{div} \underline{\sigma} + \underline{f} = 0 \text{ sur } \Omega, \quad \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{T}^d \text{ sur } \partial\Omega^f\}$$

De la même manière, un champ de déplacement est *cinématiquement admissible* à l’instant t s’il vérifie, les conditions de déplacement imposé :

$$CA_u(t) = \{\underline{u} \in H_u(\Omega) \mid \underline{u} = \underline{u}^d \text{ sur } \partial\Omega^u\}$$

ou, de façon équivalente par dérivation temporelle, un champ de vitesses est admissible à l’instant t s’il appartient à :

$$CA_v(t) = \{\underline{v} \in H_v(\Omega) \mid \underline{v} = \underline{v}^d \text{ sur } \partial\Omega^v\}$$

Le choix des espaces fonctionnels intervenant dans ces définitions détermine la régularité des champs recherchés ; pour les problèmes mécaniques on impose aux champs d’avoir une énergie (de déformation, cinétique,...) *finie*, ce qui signifie que ces espaces sont généralement bâtis sur une norme de type L^2 (ou similaire) (Dautray, Lions [30], Lions, Magenes [71]). On rappelle de plus que les portions de frontière $\partial\Omega^v$ et $\partial\Omega^f$ sont a priori quelconques.

Dans le cas quasi-statique, les ensembles CA et SA sont définis indépendamment. En revanche, en dynamique, les ensembles SA et CA sont *couplés* par les efforts d’inertie présents dans la distribution volumique d’efforts \underline{f} ; on peut ainsi construire un ensemble de champs $(\underline{u}, \underline{\sigma})$ *dynamiquement admissibles*, sur un intervalle de temps $[0, T]$ si les champs $\underline{u}(x, t)$ et $\underline{\sigma}(x, t)$ sont respectivement cinématiquement admissible à tout instant et, par abus de langage, statiquement admissible avec un \underline{f} qui contient les efforts d’inertie. A ces conditions qui portent sur les données aux limites et sur l’équilibre de la structure, il convient d’ajouter des *conditions initiales* pour les champs sur la structure à $t = 0$. On peut alors définir :

$$DA = \left\{ \begin{array}{l} (\underline{u}(x, t), \underline{\sigma}(x, t)) \in CA_u(t) \times SA(t), \forall t \in [0, T] \\ \underline{v}(x, 0) = \underline{v}_0(x), \underline{\sigma}(x, 0) = \underline{\sigma}_0(x), \forall x \in \Omega \\ \underline{f} \text{ contient les termes d'inertie} \end{array} \right\}$$

La structure se trouve généralement au repos à $t = 0$ ($\underline{v}_0(x) = 0, \forall x \in \Omega$) ; $\underline{\sigma}_0(x)$ est alors un champ d’autocontraintes.

5.4.2 Réponses admissibles d'un comportement

L'ensemble des réponses admissibles d'un comportement va permettre de préciser la raison pour laquelle le problème type idéalisé est mal posé. Cet ensemble est à la base de la construction d'une solution du (PTI).

L'ensemble des réponses admissibles est relatif à une structure donnée. On suppose que le modèle de comportement du matériau constitutif de la structure peut se définir par un vecteur de paramètres réels $\{p_i, i = 1..n\}$ (cf. paragraphe 4.4.3). On imagine ensuite l'ensemble des problèmes *directs* obtenus en appliquant toutes les conditions aux limites possibles à cette structure pour un jeu de paramètres donné.

DÉFINITION : L'ensemble $\mathcal{R}^{ad}(\{p_i\})$ des réponses admissibles du comportement défini par le jeu de paramètres $\{p_i\}$ est l'ensemble des couples $\{(\underline{v}(x, t), \underline{T}(x, t)) \mid x \in \partial\Omega, t \in [0, T]\}$ formés par la vitesse et l'effort sur la frontière, à chaque instant, pour l'ensemble des problèmes directs envisagés. \diamond

On remarque que d'appliquer "toutes les conditions aux limites possibles" revient, à cause de l'équivalence des conditions aux limites en effort et en vitesse (section 5.2.2), à appliquer un champ de vitesses $\underline{w}(x, t)$ quelconque (dans un ensemble B donné) en tout point de la frontière et à chaque instant. On peut donc écrire :

$$\mathcal{R}^{ad}(\{p_i\}) = \mathcal{A}(B, \{p_i\})$$

où \mathcal{A} est l'opérateur suivant :

$$\mathcal{A} : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow B \times C$$

$$(\underline{w}(x, t), \{p_i\}) \mapsto (\underline{w}(x, t), \underline{T}(x, t) = \text{DN}[\underline{w}(x, t), \{p_i\}])$$

bâti sur l'opérateur de Dirichlet-Neumann (c'est à dire sur la résolution du problème direct bien posé à cinématique \underline{w} imposée sur toute la frontière). B et C sont des parties des espaces de fonctions \mathcal{B} et \mathcal{C} qui contiennent respectivement les conditions aux limites en vitesse et les conditions aux limites en force sur l'intervalle de temps $[0, T]$. On se donne d'autre part des mesures sur ces espaces fonctionnels (et donc sur les ensembles B et C), de telle sorte que l'opérateur de Dirichlet-Neumann ainsi que sa réciproque (opérateur Neumann-Dirichlet) soient continus de B vers C et de C vers B respectivement : ce fait traduit l'hypothèse physique de *continuité du comportement*. Dans le cadre de l'hypothèse de monotonie (H), l'opérateur de Dirichlet-Neumann est injectif de B vers C (il est équivalent d'imposer les efforts et les vitesses). Il définit donc une bijection continue de B vers $\text{DN}(B, \{p_i\})$ (cette notation permet de préciser la dépendance de DN par rapport aux paramètres de comportement) ; sa réciproque étant continue, B et $\text{DN}(B, \{p_i\})$ sont difféomorphes, pour chaque vecteur de paramètres $\{p_i\}$ fixé. On est à présent en mesure de définir correctement l'hypothèse de continuité du comportement par rapport au jeu de paramètres (voir paragraphe 4.4.3) :

DÉFINITION : le comportement est continu par rapport au jeu de paramètres si $\text{DN}(\underline{v}(x, t), \{p_i + \delta p_i\}) \rightarrow \text{DN}(\underline{v}(x, t), \{p_i\})$ au sens de la mesure sur C pour $\underline{v}(x, t)$ fixé et $\delta p_i \rightarrow 0$. \diamond

On fait ensuite varier le vecteur de paramètres $\{p_i\}$ dans une partie physiquement raisonnable de \mathbb{R}^n . On suppose donc que les paramètres $\{p_i\}$ décrivent un domaine borné K_n de \mathbb{R}^n , donc

compact. Supposons l'ensemble B fermé ; il en est de même pour $DN(B, \{p_i\})$ (difféomorphisme) et $B \times DN(B, \{p_i\})$. On a la relation suivante :

$$\mathcal{R}^{ad} = \mathcal{A}(B, K_n) = \bigcup_{\{p_i\} \in K_n} \mathcal{R}^{ad}(\{p_i\}) = \bigcup_{\{p_i\} \in K_n} B \times DN(B, \{p_i\}) = B \times C_B ,$$

en choisissant $C_B = \bigcup_{\{p_i\} \in K_n} DN(B, \{p_i\})$. Ceci entraîne le :

RÉSULTAT : sous les hypothèses de *monotonie* et de *continuité* du comportement, sous les hypothèses faites sur les domaines décrits par les conditions aux limites et les paramètres de comportement, l'ensemble \mathcal{R}^{ad} est fermé. \diamond

En effet, si on considère une suite convergente $(\underline{v}_n, \underline{T}_n)$ d'éléments de \mathcal{R}^{ad} (au sens des métriques de B et C), il faut prouver que la limite est toujours dans \mathcal{R}^{ad} . On peut par définition associer à chaque $(\underline{v}_n, \underline{T}_n)$ un vecteur de paramètres $\{p_i\}_n$. De cette suite du compact K_n on peut extraire une sous-suite convergente $\{p_i\}_m \rightarrow \{p_i\}_\infty \in K_n$. La sous suite $\underline{v}_m \subset B$ ainsi obtenue converge vers un élément $\underline{v}_\infty \in B$ puisque B est fermé.

Considérons enfin la suite $\underline{T}'_m = DN(\underline{v}_m, \{p_i\}_\infty)$. Elle appartient au fermé $DN(B, \{p_i\}_\infty)$, relatif au vecteur de paramètres $\{p_i\}_\infty$ donc elle converge vers un élément \underline{T}'_∞ de $DN(B, \{p_i\}_\infty)$. Le comportement est supposé continu par rapport aux paramètres $\{p_i\}$: c'est une propriété de l'application Dirichlet-Neumann et par suite de l'opérateur \mathcal{A} . Cette continuité de \mathcal{A} permet d'affirmer que la sous-suite $\underline{T}_m = DN(\underline{v}_m, \{p_i\}_m)$ de la suite convergente \underline{T}_n , possède la même limite que la suite \underline{T}'_m soit $\underline{T}'_\infty \in DN(B, \{p_i\}_\infty)$ ce qui prouve que la limite $(\underline{v}_\infty, \underline{T}'_\infty)$ de la suite $(\underline{v}_n, \underline{T}_n)$ est dans \mathcal{R}^{ad} qui est donc fermé.

5.4.3 Compatibilité des conditions aux limites

La notion de compatibilité des conditions aux limites par rapport au comportement repose sur l'ensemble des réponses admissibles \mathcal{R}^{ad} . On rappelle que cette question de compatibilité se pose pour le (PTI) lorsque deux grandeurs duales (force et vitesse) sont données sur une portion $\partial\Omega^{v,f}$ de la frontière.

Un jeu de conditions aux limites dans $B \times C$ (\underline{v}^d donnée sur $\partial\Omega^v \times [0, T]$ et \underline{T}^d donnée sur $\partial\Omega^f \times [0, T]$) est donc qualifié de *compatible* par rapport au comportement défini par le vecteur $\{p_i\}$, s'il existe un élément de $\mathcal{R}^{ad}(\{p_i\})$ qui coïncide avec ces données sur les portions de frontière sur lesquelles ces données sont prescrites :

DÉFINITION : les conditions aux limites sont dites *compatibles avec le comportement défini par $\{p_i\}$* si :

$$\exists (\underline{v}, \underline{T}) \in B \times C_B \quad , \quad \begin{cases} \underline{T} &= DN(\underline{v}, \{p_i\}) \\ \underline{v} &= \underline{v}^d \text{ sur } \partial\Omega^v \times [0, T] \\ \underline{T} &= \underline{T}^d \text{ sur } \partial\Omega^f \times [0, T] \end{cases}$$

c'est à dire qu'il est possible de *prolonger* les données $(\underline{v}^d, \underline{T}^d)$ par au moins un élément de $\mathcal{R}^{ad}(\{p_i\})$. \diamond

Dans la suite on donne une méthode qui permet de construire, à partir de données aux limites non compatibles, des conditions aux limites "proches" des conditions initiales et *compatibles*, avec un comportement fixé.

Cette notion s'étend naturellement en considérant le degré de liberté supplémentaire constitué par le vecteur $\{p_i\}$, c'est à dire en examinant non plus uniquement les éléments de $\mathcal{R}^{ad}(\{p_i\})$ mais ceux de \mathcal{R}^{ad} en entier :

DÉFINITION : il y a *compatibilité avec le modèle de comportement* si :

$$\exists (\underline{v}, \underline{T}, \{p_i\}) \in B \times C_B \times K_n \quad , \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{T} = \text{DN}(\underline{v}, \{p_i\}) \\ \underline{v} = \underline{v}^d \quad \text{sur} \quad \partial\Omega^v \times [0, T] \\ \underline{T} = \underline{T}^d \quad \text{sur} \quad \partial\Omega^f \times [0, T] \end{array} \right. \quad \diamond$$

Dans le cadre que l'on vient de construire, on est en mesure de donner une solution au problème type idéalisé.

6

Solution du Problème Type Idéalisé et écarts. Solution du Problème Type

RÉSUMÉ : On traite dans cette section la résolution du problème type idéalisé, résolution qui permettra celle du problème type. Cette résolution repose sur la notion d'*écart entre évolutions*.

6.1 Solution du problème type idéalisé

La situation peut se schématiser de la façon suivante (figure 6.1) qui s'appuie sur l'ensemble \mathcal{R}^{ad} ou $\mathcal{R}^{ad}(\{p_i\})$ selon que l'on autorise (problème d'identification du comportement) ou non (problème d'évolution de type Cauchy ou apparenté) aux paramètres du modèle de comportement de varier dans K_n . (Comme K_n est compact, il suffit, pour passer de \mathcal{R}^{ad} à $\mathcal{R}^{ad}(\{p_i\})$, de restreindre K_n au point $\{p_i\}$ correspondant au comportement fixé. C'est pourquoi dans la suite on travaillera systématiquement sur \mathcal{R}^{ad} , puisque les propriétés de ces deux ensembles sont identiques). Il convient de préciser que, sur la figure 6.1, le point $(\underline{v}^d, \underline{I}^d)$ représente en fait tous

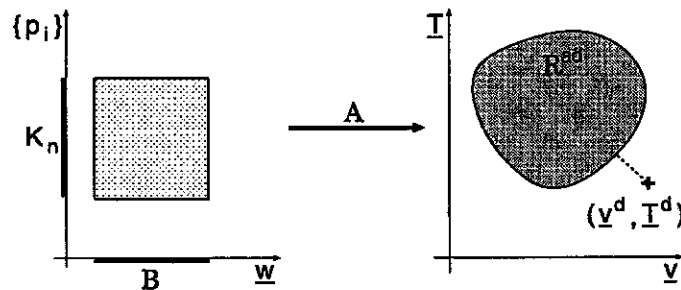


Figure 6.1 : Situation du problème type idéalisé

les *prolongements* (dans $B \times C$) à la frontière *entière* des données \underline{v}^d sur $\partial\Omega^v \cup \partial\Omega^{v,f}$ et \underline{I}^d sur $\partial\Omega^f \cup \partial\Omega^{v,f}$.

Bien entendu, ce schéma donne l'idée d'exhiber dans \mathcal{R}^{ad} un point proche du point $(\underline{v}^d, \underline{I}^d)$ comme solution du problème type idéalisé. C'est pourquoi, on cherche comme solution du (PTI)

celle(s) qui minimise(nt) une expression de la forme :

$$\min_{(\underline{v}, \underline{T}) \in \mathcal{R}^{ad}} d[(\underline{v}, \underline{T}), (\underline{v}^d, \underline{T}^d)] \quad (6.1)$$

dans laquelle $d[]$ représente une quantité qui mesure une "distance" (dans un sens qui reste à définir) entre un point de \mathcal{R}^{ad} et les données expérimentales $(\underline{v}^d, \underline{T}^d)$, de façon *continue* par rapport au point courant $(\underline{v}, \underline{T})$ de \mathcal{R}^{ad} .

Cette "distance" prend en compte l'intervalle de temps $[0, T]$ et porte respectivement sur les portions de frontières concernées par les données en vitesse ($\partial\Omega^v \cup \partial\Omega^{v,f}$) et en effort ($\partial\Omega^f \cup \partial\Omega^{v,f}$) dans la mesure où $d[(\underline{v}, \underline{T}), (\underline{v}^d, \underline{T}^d)] = 0$ si et seulement si $\underline{v} = \underline{v}^d$ et $\underline{T} = \underline{T}^d$ sur, respectivement, $\partial\Omega^v \cup \partial\Omega^{v,f}$ et $\partial\Omega^f \cup \partial\Omega^{v,f}$, pour tout $t \in [0, T]$. On a alors la :

PROPRIÉTÉ : L'ensemble \mathcal{R}^{ad} étant fermé et $d[]$ supposée continue sur \mathcal{R}^{ad} , on sait que pour le problème (6.1) le minimum existe et est atteint pour un couple $(\underline{v}, \underline{T}) \in \mathcal{R}^{ad}$. De plus on a l'équivalence :

$$(\underline{v}^d, \underline{T}^d) \text{ compatibles} \iff \min_{(\underline{v}, \underline{T}) \in \mathcal{R}^{ad}} d[(\underline{v}, \underline{T}), (\underline{v}^d, \underline{T}^d)] = 0$$

qui implique que, pour des données correspondant à un problème *direct*, la solution obtenue par (6.1) est bien la solution de ce problème direct. \diamond

L'implication \Rightarrow vient du fait (cf. définition de la compatibilité) que, si \underline{v}^d et \underline{T}^d sont compatibles, il existe une solution du problème direct vérifiant $\underline{v} = \underline{v}^d$ et $\underline{T} = \underline{T}^d$ qui annule donc $d[]$; réciproquement s'il existe $(\underline{v}, \underline{T}) \in \mathcal{R}^{ad}$ qui annule $d[]$, \underline{v}^d et \underline{T}^d sont *par définition* compatibles (section 5.4.3).

Ce procédé de construction donne toujours une solution au problème type idéalisé (donc aussi, comme cas particulier, au problème de Cauchy) et possède la propriété - nécessaire - qui est de fournir la solution du problème direct lorsque le (PTI) est de forme (PD). Outre l'existence d'un minimum dans (6.1), la minimisation doit être *bien posée* par rapport aux données \underline{v}^d et \underline{T}^d , c'est à dire qu'elle doit vérifier la continuité de la solution par rapport à celles-ci.

Notons Q la quantité minimisée dans (6.1) et Q_0 la valeur prise par Q sur la solution. Raisonnons par l'absurde et supposons que le processus de minimisation ci-dessus ne fournisse pas des arguments dépendant continûment des données aux limites. Il existe alors $\epsilon > 0$ tel que, pour tout $\eta > 0$, on peut trouver un couple $(\delta\underline{v}^d, \delta\underline{T}^d)$ de norme inférieure à η , c'est à dire $\|\delta\underline{v}^d\|_v + \|\delta\underline{T}^d\|_T < \eta$, pour lequel la norme de la variation du problème de minimisation (6.1) soit strictement supérieure à ϵ : $\|\delta\underline{v}\|_v + \|\delta\underline{T}\|_T + \|\{p_i\}\|_{\mathbb{R}^n} > \epsilon$ (où les normes sont associées, respectivement, aux grandeurs apparaissant en indice).

Par hypothèse, la variation de l'optimum de Q due au changement des conditions $(\underline{v}^d, \underline{T}^d) \rightarrow (\underline{v}^d + \delta\underline{v}^d, \underline{T}^d + \delta\underline{T}^d)$ peut être rendue arbitrairement petite par choix de η . La variation de l'argument $(\underline{v}, \underline{T}) \rightarrow (\underline{v} + \delta\underline{v}, \underline{T} + \delta\underline{T})$ reste en revanche de l'ordre de ϵ ce qui implique que Q est minorée par $Q_0 + a(\epsilon)$ où $a(\epsilon)$ est une expression strictement positive de ϵ . En effet, si $a(\epsilon)$ était négative, comme η est arbitrairement petit, le couple $(\underline{v} + \delta\underline{v}, \underline{T} + \delta\underline{T})$ serait un meilleur argument que $(\underline{v}, \underline{T})$ pour la minimisation (6.1) : ceci contredit la définition de $(\underline{v}, \underline{T})$.

On considère à présent la valeur :

$$Q(\alpha) = d[(\underline{v} + \alpha\delta\underline{v}, \text{DN}(\underline{v} + \alpha\delta\underline{v}), (\underline{v}^d - \delta\underline{v}^d, \underline{T}^d - \delta\underline{T}^d)]$$

obtenue avec les données $\underline{v}^d + \delta\underline{v}^d$ et $\underline{T}^d + \delta\underline{T}^d$, et une variation $\alpha\delta\underline{v}$ ($0 < \alpha < 1$) de \underline{v} . L'hypothèse de *continuité* de l'application DN entraîne la continuité de $Q(\alpha)$ par rapport à α

(puisque $\underline{T} = \text{DN}(\underline{v} + \alpha \delta \underline{v})$ est continue par rapport à α) ; pour un choix de η et α suffisamment petits, les variations $\delta \underline{v}^d$, $\delta \underline{T}^d$, $\delta \underline{v}$ et $\delta \underline{T}$ sont telles que la valeur $Q(\alpha)$ peut être rendue inférieure à $Q_0 + \frac{1}{2} a(\epsilon)$ ce qui contredit le fait que $\underline{v} + \delta \underline{v}$ et $\underline{T} + \delta \underline{T}$ sont arguments optimaux de (6.1) avec les données $\underline{v}^d + \delta \underline{v}^d$ et $\underline{T}^d + \delta \underline{T}^d$.

RÉSULTAT : La solution du problème de minimisation (6.1) est *continue* par rapport aux conditions aux limites données, sous l'hypothèse de continuité de l'application de Dirichlet-Neumann. Ceci fait de (6.1) une méthode de résolution *bien posée* du problème type idéalisé. \diamond

6.2 Construction de la solution du (PTI)

La difficulté de cette approche réside dans la description de l'ensemble \mathcal{R}^{ad} qui est très vaste et ne permet que difficilement de construire *pratiquement* la solution liée au processus de minimisation (6.1). La méthode est donc de restreindre le problème en ne considérant qu'une *partie* de \mathcal{R}^{ad} (fermée, pour ne pas changer la nature du problème). On envisage deux réductions successives de \mathcal{R}^{ad} .

1^{ère} réduction :

Cette réduction consiste à *fixer* les conditions aux limites données uniquement en effort et uniquement en vitesse dans les problèmes directs qui génèrent \mathcal{R}^{ad} puisque cette information est la seule qui soit indépendante et non soumise à des conditions de compatibilité. On note $S(\underline{w})$ (ou $S(\underline{w}, \{p_i\})$ si l'on veut insister sur la dépendance par rapport aux paramètres de comportement) les solutions de ces problèmes directs, définis par :

- \hookrightarrow vitesse \underline{v}^d imposée sur $\partial\Omega^v \times [0, T]$,
- \hookrightarrow effort \underline{T}^d imposé sur $\partial\Omega^f \times [0, T]$,
- \hookrightarrow vitesse \underline{w} imposée sur $(\partial\Omega^{v,f} \cup \partial\Omega^\emptyset) \times [0, T]$,

où le champ de vitesses \underline{w} est considéré comme une *variable de contrôle*. Le choix d'imposer une vitesse plutôt qu'un effort est licite puisqu'il est équivalent d'imposer effort ou vitesse (section 5.2.2). Dans ce cas, la minimisation revient à ajuster le champ \underline{w} de façon à minimiser l'écart entre les couples $(\underline{w}, \underline{T}(\underline{w}))$ et $(\underline{v}^d, \underline{T}^d)$ sur le domaine $\partial\Omega^{v,f} \times [0, T]$ (supposé non vide).

Il faut faire la remarque suivante concernant le problème de minimisation (6.1) lorsque $\partial\Omega^\emptyset$ n'est pas vide. En effet, supposons pour simplifier que $\partial\Omega^v = \partial\Omega^f = \emptyset$; le (PTI) est alors un problème de Cauchy. Notons \underline{w}_0 la variable de contrôle qui correspond à la solution optimale de (6.1) pour ce problème de Cauchy. La valeur du minimum dans (6.1) est très peu modifiée par une petite perturbation $\delta \underline{w}_0$ quelconque de \underline{w}_0 , pourvu qu'elle n'affecte qu'une petite zone éloignée de $\partial\Omega^{v,f}$ et reste limitée dans le temps (en effet, les solutions pour \underline{w}_0 et $\underline{w}_0 + \delta \underline{w}_0$ sont quasiment identiques, a fortiori au voisinage de $\partial\Omega^{v,f}$). En revanche, d'un point de vue pratique, il est délicat de discerner la solution \underline{w}_0 de ses perturbations $\underline{w}_0 + \delta \underline{w}_0$. Pour lever cette indétermination, il faut ajouter de l'information *a priori* qui *régularise* le problème de minimisation (6.1). La contrainte sur \underline{w}_0 n'étant en quelque sorte pas suffisante sur $\partial\Omega^\emptyset$, pour prévenir par exemple des oscillations du contrôle \underline{w}_0 , on peut pénaliser (6.1) par un terme mesurant les variations de \underline{w}_0 .

Une critique que l'on peut formuler tient au fait que cette approche est trop "mathématique" et n'introduit aucune considération physique dans la comparaison des conditions aux limites ; d'autre part, si $\partial\Omega^\emptyset \neq \emptyset$, il faut prendre garde au sens physique de l'information ajoutée en

régularisant le problème (6.1).

2nde réduction :

Cet inconvénient amène à considérer la méthode suivante. A partir des données du (PTI), il est possible de construire, pour tout jeu de paramètres de comportement $\{p_i\}$, les couples de problèmes directs dont les solutions sont notées - comme précédemment - $S(\underline{w}, \{p_i\})$ et $S^*(\underline{w}, \{p_i\})$, l'étoile faisant référence à leur caractère dual puisque ces solutions sont définies par les conditions aux limites suivantes :

- ↪ vitesse imposée sur $\partial\Omega^v$ pour $S(\underline{w}, \{p_i\})$ et $S^*(\underline{w}, \{p_i\})$,
- ↪ effort imposé sur $\partial\Omega^f$ pour $S(\underline{w}, \{p_i\})$ et $S^*(\underline{w}, \{p_i\})$,
- ↪ si la condition aux limites CL relative à $S(\underline{w}, \{p_i\})$ sur $\partial\Omega^{v,f}$ correspond à la donnée du vecteur vitesse sur une partie de $\partial\Omega^{v,f}$ et du vecteur traction sur la partie complémentaire, la solution $S^*(\underline{w}, \{p_i\})$ est définie par les conditions aux limites duales CL^* (c'est à dire, pour $S^*(\underline{w}, \{p_i\})$, la donnée de la vitesse sur la portion de $\partial\Omega^{v,f}$ où l'on impose la traction pour $S(\underline{w}, \{p_i\})$ et vice versa),
- ↪ sur $\partial\Omega^\emptyset$, on complète arbitrairement les conditions aux limites, de la même manière pour $S(\underline{w}, \{p_i\})$ et $S^*(\underline{w}, \{p_i\})$ en imposant le champ de vitesse \underline{w} .

Ces conditions aux limites fournissent la description d'une partie de \mathcal{R}^{ad} , incluse dans la première réduction (tableau 6.1). On a en effet réduit les degrés de liberté en fixant les formes possibles

	$\partial\Omega^f$	$\partial\Omega^v$	$\partial\Omega^{v,f}$	$\partial\Omega^\emptyset$
\mathcal{R}^{ad}	quelconque	quelconque	quelconque	quelconque
1 ^{ère} réduction	$\underline{T} = \underline{T}^d$	$\underline{v} = \underline{v}^d$	quelconque	quelconque
2 nd e réduction	$\underline{T} = \underline{T}^d$	$\underline{v} = \underline{v}^d$	$\underline{T} = \underline{T}^d$ ou $\underline{v} = \underline{v}^d$	quelconque

Tableau 6.1 : Réductions de \mathcal{R}^{ad}

des conditions aux limites sur $\partial\Omega^{v,f}$.

On note que les solutions $S(\underline{w}, \{p_i\})$ et $S^*(\underline{w}, \{p_i\})$ ne sont identiques que si les conditions aux limites sont *compatibles* par rapport à la loi de comportement. Cette question de compatibilité ne se pose que si $\partial\Omega^{v,f} \neq \emptyset$, ce que l'on suppose vérifié dans la suite. En effet, le problème qui nous intéresse au premier chef est celui de l'identification du comportement, identification qui repose sur la connaissance des efforts et des vitesses sur une portion *commune* de frontière.

Le principe est donc de construire une *mesure de cette (non)-compatibilité* : cette mesure est appelée *écart à la compatibilité*. Cette notion est introduite dans la section 6.4 où sont explicités et comparés différents écarts.

CONSÉQUENCE : la solution du (PTI) sera construite à partir du couple $(S(\underline{w}, \{p_i\}), S^*(\underline{w}, \{p_i\}))$ qui présente *l'écart le plus faible* c'est à dire celui qui vérifie au mieux la compatibilité des conditions aux limites ; il vérifie donc :

$$\min_{\underline{w}, \{p_i\}} e(S(\underline{w}, \{p_i\}), S^*(\underline{w}, \{p_i\})) \quad (6.2)$$

Cette solution *dépend* a priori de l'écart choisi pour mesurer la différence entre deux solutions. ◊

La question qui se pose à présent est *comment*, à partir de $S(\underline{w}, \{p_i\})$ et $S^*(\underline{w}, \{p_i\})$, donner une solution au (PTI). Si l'écart entre ces solutions est faible, chacune est raisonnablement

une candidate solution du (PTI). Cependant, si pour $S(\underline{w}, \{p_i\})$ on choisit $\underline{v} = \underline{v}^d$ sur $\partial\Omega^{v,f}$ et pour $S^*(\underline{w}, \{p_i\})$ $\underline{T} = \underline{T}^d$ sur $\partial\Omega^{v,f}$, on constate que $S(\underline{w}, \{p_i\})$ est une solution plutôt “cinématiquement admissible” tandis que $S^*(\underline{w}, \{p_i\})$ est plutôt “statiquement admissible” : ces solutions vérifient en effet respectivement un maximum de données en vitesse et un maximum de données en effort sur la frontière (ce choix constitue une réduction supplémentaire). On peut alors choisir comme solution du (PTI) le champ de vitesse \underline{v} de la solution $S(\underline{w}, \{p_i\})$ et le champ de contrainte $\underline{\sigma}^*$ de la solution $S^*(\underline{w}, \{p_i\})$. L'élément $\underline{\sigma}^*$ qui relève de l'ensemble SA et l'élément \underline{v} dans CA_v ne sont *pas* compatibles, c'est à dire qu'ils n'appartiennent pas à DA : $\underline{\sigma}^*$ est en équilibre avec les efforts d'inertie issus du champ de vitesses \underline{v}^* qui ne sont pas a priori compatibles avec les vitesses imposées. D'autre part, le champ de contraintes $\underline{\sigma}$ associé par la loi de comportement à la cinématique \underline{v} est différent du $\underline{\sigma}^*$ choisi dans la solution.

Ces remarques font apparaître *comment doit fonctionner l'écart*. Il doit être en mesure, premièrement, de refléter la différence de cinétique (relation cinématique - efforts inertiels) entre \underline{v} et \underline{v}^* ; ensuite, il doit prendre en compte les différences liées au comportement (relation cinématique - efforts internes) $\underline{\sigma}$ et $\underline{\sigma}^*$. L'erreur commise en prenant pour solution du (PTI) le couple $(\underline{v}, \underline{\sigma}^*)$ est alors mesurée par l'écart entre les solutions $S(\underline{w}, \{p_i\})$ et $S^*(\underline{w}, \{p_i\})$. On rappelle aussi que cet écart est lié au défaut de compatibilité des données aux limites \underline{v}^d et \underline{T}^d .

Dans le même esprit, en utilisant des champs cinématiquement ou statiquement admissibles et toujours grâce à la notion d'écart entre solutions, on peut aussi imaginer partir de l'ensemble DA pour donner une solution au (PTI). En effet, à un élément $(\underline{v}, \underline{\sigma}) \in DA$ on peut associer à $\underline{\sigma}$ par l'équation de comportement un champ de vitesses $\tilde{\underline{v}}$ et réciproquement un champ de contraintes $\tilde{\underline{\sigma}}$ en équilibre avec le champ d'efforts inertiels $\rho \frac{d\underline{v}}{dt}$. L'erreur associée à l'élément $(\underline{v}, \underline{\sigma}) \in DA$ est alors l'écart entre les deux solutions $(\underline{v}, \tilde{\underline{\sigma}})$ et $(\tilde{\underline{v}}, \underline{\sigma})$. D'un point de vue théorique cette approche peut paraître intéressante, cependant la description de l'ensemble DA est en général aussi délicate que celle de \mathcal{R}^{ad} en entier.

6.3 Construction d'une solution compatible du (PTI)

On suppose dans cette section que l'on a construit les solutions $S(\underline{w}, \{p_i\})$ et $S^*(\underline{w}, \{p_i\})$ qui minimisent (6.1) dans le cadre de la seconde réduction de l'ensemble \mathcal{R}^{ad} . La solution du (PTI) préconisée plus haut utilise le champ de vitesses \underline{v} de la solution $S(\underline{w}, \{p_i\})$, qui présente un caractère cinématiquement admissible, et le champ de contraintes $\underline{\sigma}^*$ de la solution $S^*(\underline{w}, \{p_i\})$, de caractère statiquement admissible. On rappelle que l'on a dans ce cas $\underline{v} = \underline{v}^d$ sur $\partial\Omega^v \cup \partial\Omega^{v,f}$ et $\underline{T} = \underline{T}^d$ sur $\partial\Omega^f \cup \partial\Omega^{v,f}$.

On fixe à présent le jeu de paramètres du comportement. A partir de $(\underline{v}, \underline{\sigma}^* \cdot \underline{n}) \notin \mathcal{R}^{ad}(\{p_i\})$ (couple *non* compatible) on construit un couple de $\mathcal{R}^{ad}(\{p_i\})$ grâce à la suite de couples $(\underline{v}_n, \underline{T}_n)$ dont on montre la compatibilité croissante et qui converge vers un élément de $\mathcal{R}^{ad}(\{p_i\})$:

$$\begin{cases} v_0 = \underline{v} \\ t_0 = \underline{\tilde{\sigma}} \cdot \underline{n} \\ \tilde{v}_n = \text{ND}(t_n) \\ \tilde{t}_n = \text{DN}(v_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}(v_n + \tilde{v}_n) \\ t_{n+1} = \frac{1}{2}(t_n + \tilde{t}_n) \end{cases} \quad (n \geq 0) \quad (6.3)$$

et dont les termes successifs v_n, t_n sont de type “conditions aux limites sur toute la frontière” (en vitesse ou en force). Ils sont construits de la manière suivante : la vitesse (resp. la force)

à l'étape $n + 1$ est la moyenne arithmétique de la vitesse (resp. de la force) à l'étape n et de l'image par l'application de Neumann-Dirichlet (resp. Dirichlet-Neumann) de la force (resp. de la vitesse) à l'étape n (on rappelle que $ND = DN^{-1}$). La suite v_n (resp. t_n) tend donc à "per-

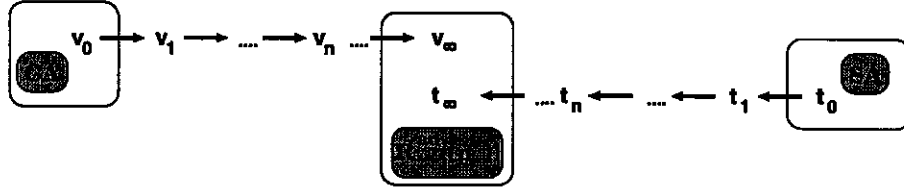


Figure 6.2 : Construction de conditions compatibles

dre" son caractère cinématiquement admissible (resp. statiquement admissible) au profit d'une meilleure admissibilité statique, via DN (resp. cinématique, via ND) (figure 6.2). Le couple limite compatible (v_∞, t_∞) permet aussi *visuellement* de situer les données initiales v_0 et t_0 (ce sont de fonctions du temps).

Les termes de la suite sont construits dans l'espace des fonctions (vectorielles) L^2 sur le domaine $\partial\Omega \times]0, T[$. Le produit scalaire sur cet espace de Hilbert et la norme associée sont notés :

$$\langle \underline{v}; \underline{t} \rangle = \int_0^T \int_{\partial\Omega} \underline{v} \cdot \underline{t} \, dS \, dt \quad , \quad \|\underline{v}\|^2 = \langle \underline{v}; \underline{v} \rangle$$

Pour obtenir les propriétés de convergence de (6.3) on va supposer que l'application DN vérifie la propriété de régularité suivante : pour tous u, u', w, w' avec w et w' dans le segment $[u, u']$, il existe η réel et strictement positif tel que :

$$\frac{\|DN(w) - DN(w')\|}{\|w - w'\|} \leq (1 + \eta) \underbrace{\frac{\|DN(u) - DN(u')\|}{\|u - u'\|}}_{\mu} \quad (6.4)$$

Cette relation signifie que, sur un segment donné $[u, u']$, la "dilatation" d'un sous segment $[w, w']$ quelconque par DN n'excède pas le rapport $(1 + \eta)$. A priori, plus le segment initial $[u, u']$ est étendu et plus le coefficient η est élevé. Cette majoration est liée à la non-linéarité de l'application DN et le coefficient $(1 + \eta_m) \geq 1$ obtenu pour la valeur la plus faible η_m de η est un indicateur de cette non-linéarité sur $[u, u']$. On généralise cette notion lorsque le segment $[u, u']$ est remplacé par une partie de l'espace.

Si l'application est linéaire, les rapports des normes intervenant dans les deux membres de (6.4) sont constants et égaux à la norme de l'application linéaire en question : le coefficient de non-linéarité est alors égal à 1.

Réciproquement, supposons η_m nul. L'inégalité (6.4) devient alors une égalité. On identifie $[u, u']$ au segment $[0, 1] \subset \mathbb{R}$, et on pose $\nu = (u' - u)/\|u' - u\|$. Si pour un ensemble de points $w \in [u, u']$ de mesure non nulle, l'inégalité (6.4) est stricte, on a :

$$\begin{aligned} \|DN(u) - DN(u')\| &= \left\| \int_0^1 DN(u + (\alpha + d\alpha)\nu) - DN(u + \alpha\nu) \right\| \\ &\leq \int_0^1 \underbrace{\|DN(u + (\alpha + d\alpha)\nu) - DN(u + \alpha\nu)\|}_J \\ &< \|DN(u) - DN(u')\| \end{aligned} \quad (6.5)$$

puisque $J < \|DN(u) - DN(u')\| d\alpha$ dans une zone de mesure non nulle. Cette contradiction entraîne l'égalité dans (6.4). La restriction de DN à $[u, u']$ est une dilatation de rapport μ donc elle est linéaire.

En conséquence, dès que l'application présente une non-linéarité, η_m est *nécessairement* strictement positif. Si la propriété $\eta_m = 0$ est vérifiée pour tout segment d'un ouvert donné, la continuité de DN impose à μ (a priori relatif à chaque segment considéré) une valeur uniforme sur cet ouvert et par suite la restriction de DN à cet ouvert est linéaire.

Si l'application DN admet une dérivée directionnelle $\partial_\nu DN$ selon ν au point w , le passage à la limite $w' \rightarrow w$ dans le premier membre de (6.4) fait apparaître la norme de cette dérivée directionnelle. On interprète donc (6.4) comme un contrôle, via η , de l'accroissement local $\partial_\nu DN(w)$ par l'accroissement moyen μ .

Dans la suite on supposera l'existence d'un $\eta > 0$ permettant de vérifier uniformément la propriété (6.4) dans un voisinage \mathcal{V} assez grand de v_0 et \tilde{v}_0 (cela suppose v_0 et \tilde{v}_0 proches c'est à dire que l'incompatibilité des données initiales v_0 et t_0 n'est pas trop forte).

Etude des propriétés de la suite

Etudions à partir de l'hypothèse (6.4) les propriétés de convergence de la suite (6.3) et pour cela considérons l'étape n de sa construction. On écrit l'inégalité (6.4) entre le point $(v_{n+1}, \tilde{t}_{n+1})$ et les extrémités du segment $[(\tilde{v}_n, t_n), (v_n, \tilde{t}_n)]$:

$$\begin{aligned} \frac{\|\tilde{t}_{n+1} - t_n\|}{\|v_{n+1} - \tilde{v}_n\|} &\leq (1 + \eta) \frac{\|t_n - \tilde{t}_n\|}{\|\tilde{v}_n - v_n\|} \\ \frac{\|\tilde{t}_{n+1} - \tilde{t}_n\|}{\|v_{n+1} - v_n\|} &\leq (1 + \eta) \frac{\|t_n - \tilde{t}_n\|}{\|\tilde{v}_n - v_n\|} \end{aligned}$$

c'est à dire en tenant compte de la définition de v_{n+1} comme milieu de $[v_n, \tilde{v}_n]$:

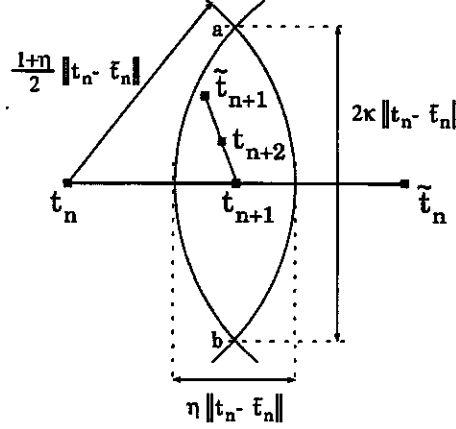
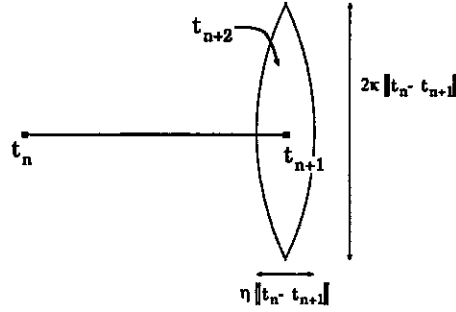
$$\begin{aligned} \|\tilde{t}_{n+1} - t_n\| &\leq \frac{1+\eta}{2} \|t_n - \tilde{t}_n\| \\ \|\tilde{t}_{n+1} - \tilde{t}_n\| &\leq \frac{1+\eta}{2} \|t_n - \tilde{t}_n\| \end{aligned} \tag{6.6}$$

Ces relations permettent de situer le point \tilde{t}_{n+1} dans l'intersection des boules centrées en t_n et \tilde{t}_n , de rayon $\frac{1+\eta}{2} \|t_n - \tilde{t}_n\|$. Cette intersection forme le fuseau (a, b) (figure 6.3) de "diamètre" $\sqrt{\eta^2 + 2\eta} \|t_n - \tilde{t}_n\|$ et d'"épaisseur" $\eta \|t_n - \tilde{t}_n\|$. On pose $\kappa = \frac{1}{2}\sqrt{\eta^2 + 2\eta}$. Le point t_{n+2} , milieu du segment $[t_{n+1}, \tilde{t}_{n+1}]$ appartient par conséquent au fuseau image de (a, b) par l'homothétie de centre t_{n+1} et de rapport $\frac{1}{2}$. La suite $\{t_n\}$ suit donc le schéma de la figure 6.4 qui permet d'obtenir la relation :

$$\|t_{n+2} - t_{n+1}\| \leq \max(\frac{\eta}{2}, \kappa) \|t_{n+1} - t_n\| = \kappa \|t_{n+1} - t_n\| \tag{6.7}$$

dans laquelle $\kappa < 1$ si $\eta < \sqrt{5} - 1$ et $\kappa < \frac{1}{2}$ si $\eta < \sqrt{2} - 1$ c'est à dire lorsque l'on suppose la non-linéarité de DN pas trop forte dans le voisinage \mathcal{V} .

La relation (6.7) montre que la suite $\{t_n\}$ est de Cauchy et converge dans l'espace de Hilbert choisi puisque la décroissance de la suite $\|t_{n+1} - t_n\|$ est plus rapide qu'une décroissance géométrique de rapport $\kappa < 1$. La suite $\{\tilde{t}_n\}$ présente des propriétés de convergence analogues et possède la même limite, notée t_∞ . L'image $\{v_n\}$ de $\{\tilde{t}_n\}$ par l'application ND est par conséquent aussi convergente (ainsi que $\{\tilde{v}_n\}$) puisque l'application ND est continue et sa limite v_∞ n'est autre que l'image de t_∞ .

Figure 6.3 : Fuseau contenant \tilde{t}_{n+1} Figure 6.4 : La suite $\{t_n\}$

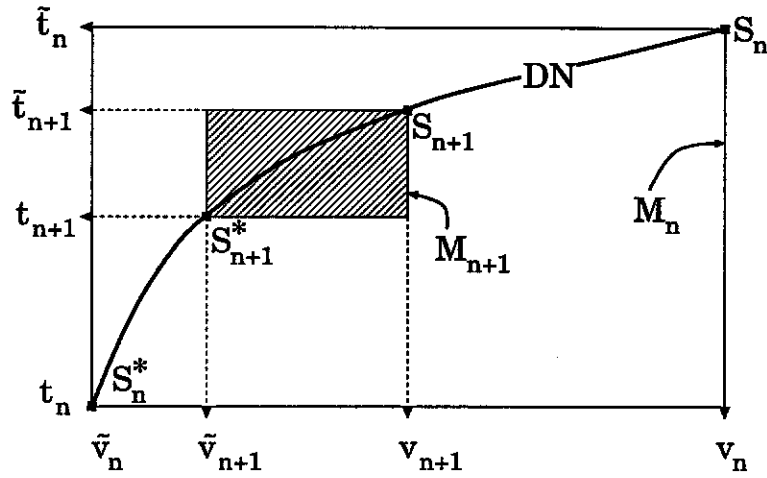
RÉSULTAT : La construction définie par (6.3) fournit un couple (v_∞, t_∞) de conditions compatibles, c'est à dire vérifiant $t_\infty = \text{DN}(t_\infty)$. \diamond

La compatibilité des couples successifs (v_n, t_n) est améliorée à chaque pas. Celle-ci est quantifiée par l'écart entre les solutions S_n et S_n^* , de conditions aux limites respectives $(v_n, \tilde{t}_n = \text{DN}(v_n))$ et $(\tilde{v}_n = \text{ND}(t_n), t_n)$. En effet, une mesure de cet écart (voir section 6.4.1 pour sa définition) est par exemple donnée par :

$$\begin{aligned} M_n &\equiv \int_0^T \int_{\partial\Omega} (v_n - \tilde{v}_n) \cdot (\tilde{t}_n - t_n) dS dt = \langle v_n - \tilde{v}_n ; \tilde{t}_n - t_n \rangle \\ &\leq \|v_n - \tilde{v}_n\| \cdot \|\tilde{t}_n - t_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned} \quad (6.8)$$

Schématiquement, la solution $S_\infty = S_\infty^*$ relative aux conditions compatibles (v_∞, t_∞) se trouvent "entre" les estimations successives S_n et S_n^* (figure 6.5). La décroissance de chacune des normes dans la majoration (6.8) est (plus rapide que) géométrique de rapport κ ; la suite $\{M_n\}$ est donc majorée par une suite géométrique de rapport κ^2 . La compatibilité entre S_n et S_n^* s'interprète sur la figure 6.5 comme l'aire M_n du rectangle de sommets S_n et S_n^* . Le rapport M_{n+1}/M_n des aires successives est un indicateur de la non-linéarité de DN : plus il est faible, plus la non-linéarité (au voisinage de v_n, \tilde{v}_n) l'est. Si l'application est linéaire, ce rapport est nul (figure 6.6).

Dans la définition de la suite, le choix du milieu des segments pour construire les points à l'étape suivante provient du fait que, lorsque l'application DN est linéaire, la suite est stationnaire à partir de $n = 1$ puisque le couple $(\frac{1}{2}(\underline{x}^d + \text{ND}(\underline{T}^d)), \frac{1}{2}(\underline{T}^d + \text{DN}(\underline{x}^d)))$ obtenu lors du

Figure 6.5 : Construction "géométrique" de la suite, décroissance de M_n

premier pas est *compatible*. Le choix dans (6.3) d'une pondération différente de $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ dans la

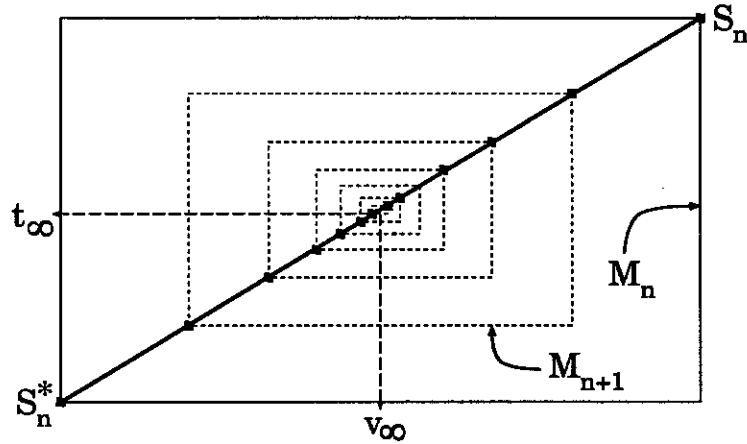


Figure 6.6 : Cas linéaire, pondérations (0.2, 0.8)

définition du pas $n + 1$ conduirait dans le cas linéaire à une suite géométrique, moins "performante" que la suite stationnaire (figure 6.6).

Quelques résultats supplémentaires

On peut en effet être un peu plus précis en ce qui concerne le "gain" de compatibilité. En effet, la relation (6.7) permet d'écrire :

$$\|t_{n+p} - t_n\| \leq \frac{1-\kappa^p}{1-\kappa} \|t_{n+1} - t_n\| \quad \forall (n, p) \in \mathbb{N}^2$$

d'où l'on tire, avec (6.7) :

$$\|t_\infty - t_1\| \leq \frac{1}{1-\kappa} \|t_2 - t_1\| \leq \frac{\kappa}{1-\kappa} \|t_1 - t_0\| = \frac{\kappa}{2(1-\kappa)} \|\tilde{t}_0 - t_0\|$$

soit :

$$\|t_\infty - \frac{\tilde{t}_0 + t_0}{2}\| \leq \frac{\kappa}{2(1-\kappa)} \|\tilde{t}_0 - t_0\| < \frac{1}{2} \|\tilde{t}_0 - t_0\| \quad (6.9)$$

que l'on traduit par la figure 6.7 : t_∞ appartient à la boule centrée en $\frac{\tilde{t}_0 + t_0}{2}$ de rayon $\frac{\kappa}{2(1-\kappa)} \|\tilde{t}_0 - t_0\|$. On en déduit les relations (6.10).

$$\begin{aligned} \|t_\infty - t_0\| &\leq \frac{1}{2(1-\kappa)} \|\tilde{t}_0 - t_0\| < \|\tilde{t}_0 - t_0\| \\ \|t_\infty - \tilde{t}_0\| &\leq \frac{1}{2(1-\kappa)} \|\tilde{t}_0 - t_0\| < \|\tilde{t}_0 - t_0\| \end{aligned} \quad (6.10)$$

Dans (6.9) et (6.10), l'inégalité stricte est subordonnée à la condition $\kappa < \frac{1}{2}$ (i.e. $\eta < \sqrt{2} - 1$). Un raisonnement analogue reposant sur une *minoration* des variations de DN (parallèlement à

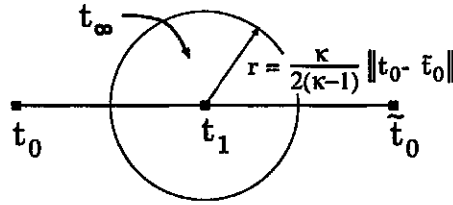


Figure 6.7 : Position de t_∞

la majoration (6.4)) ou, ce qui est équivalent, une majoration des variations de ND, conduit à des relations similaires portant sur la vitesse mais avec des coefficients η' et κ' (a priori différents de η et κ) :

$$\|v_\infty - \frac{\tilde{v}_0 + v_0}{2}\| \leq \frac{\kappa'}{2(1-\kappa')} \|\tilde{v}_0 - v_0\| < \frac{1}{2} \|\tilde{v}_0 - v_0\| \quad (6.11)$$

$$\|v_\infty - v_0\| \leq \frac{1}{2(1-\kappa')} \|\tilde{v}_0 - v_0\| < \|\tilde{v}_0 - v_0\| \quad (6.12)$$

$$\|v_\infty - \tilde{v}_0\| \leq \frac{1}{2(1-\kappa')} \|\tilde{v}_0 - v_0\| < \|\tilde{v}_0 - v_0\|$$

Les relations (6.9) à (6.12) s'interprètent de la façon suivante. \tilde{t}_0 (resp. \tilde{v}_0) représente l'équivalent de la vitesse initiale v_0 (resp. l'effort initial t_0) dans l'espace des efforts (resp. des vitesses). $\|\tilde{t}_0 - t_0\|$ et $\|\tilde{v}_0 - v_0\|$ mesurent donc le défaut de compatibilité du couple de conditions aux limites initiales (v_0, t_0) . Les relations (6.9) à (6.12) montrent que le défaut de compatibilité entre la solution (v_∞, t_∞) et les estimations initiales (v_0, \tilde{t}_0) et (\tilde{v}_0, t_0) est améliorée.

Une autre propriété peut être déduite de ces relations, qui concerne la figure 6.5 et la mesure M_n de l'écart de compatibilité. Plaçons nous dans les plans définis par les vecteurs $v_0 - \tilde{v}_0$ et $\tilde{t}_0 - t_0$ et passant par v_0 et t_0 respectivement (figure 6.8). On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} t_\infty - t_0 &= \alpha (\tilde{t}_0 - t_0) + t_\infty^\perp & t_\infty - \tilde{t}_0 &= (1 - \alpha) (t_0 - \tilde{t}_0) + t_\infty^\perp \\ v_\infty - \tilde{v}_0 &= \beta (v_0 - \tilde{v}_0) + v_\infty^\perp & v_\infty - v_0 &= (1 - \beta) (\tilde{v}_0 - v_0) + v_\infty^\perp \end{aligned} \quad (6.13)$$

où t_∞^\perp et v_∞^\perp sont respectivement orthogonaux à $v_0 - \tilde{v}_0$ et $\tilde{t}_0 - t_0$. On a donc :

$$\begin{aligned} M_{0,\infty} &= \langle v_\infty - \tilde{v}_0 ; t_\infty - t_0 \rangle = \alpha \beta \langle v_0 - \tilde{v}_0 ; \tilde{t}_0 - t_0 \rangle + \langle v_\infty^\perp ; t_\infty^\perp \rangle \\ \tilde{M}_{0,\infty} &= \langle v_\infty - v_0 ; t_\infty - \tilde{t}_0 \rangle = (1 - \alpha) (1 - \beta) \langle v_0 - \tilde{v}_0 ; \tilde{t}_0 - t_0 \rangle + \langle v_\infty^\perp ; t_\infty^\perp \rangle \end{aligned}$$

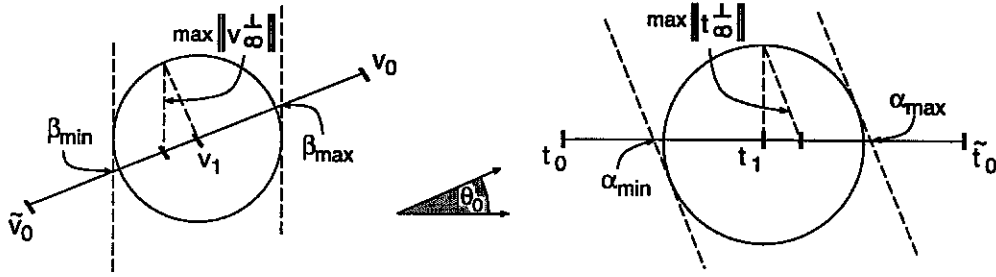


Figure 6.8 : Construction pour la majoration

soit :

$$M_{0,\infty} + \tilde{M}_{0,\infty} = (1 + 2\alpha\beta - \alpha - \beta) M_0 + 2 \langle v_\infty^\perp; t_\infty^\perp \rangle$$

où M_0 , $M_{0,\infty}$ et $\tilde{M}_{0,\infty}$ sont des quantités *positives*. On définit ensuite l'angle entre les vecteurs $v_0 - \tilde{v}_0$ et $\tilde{t}_0 - t_0$ (cf. figure 6.8) par :

$$\cos \theta_0 = \frac{\langle v_0 - \tilde{v}_0; \tilde{t}_0 - t_0 \rangle}{\|v_0 - \tilde{v}_0\| \|\tilde{t}_0 - t_0\|} \geq 0 \quad , \quad \theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

Comme les points v_∞ et t_∞ sont respectivement dans les boules centrées en v_1 et t_1 de rayons $\frac{\kappa'}{2(1-\kappa')} \|v_0 - \tilde{v}_0\|$ et $\frac{\kappa}{2(1-\kappa)} \|\tilde{t}_0 - t_0\|$ (cf. figure 6.8), on a les majorations :

$$\begin{aligned} \|v_\infty^\perp\| &\leq \frac{1}{2} \xi' \|v_0 - \tilde{v}_0\| \quad , \quad \xi' = \frac{\kappa'}{(1-\kappa') \cos \theta_0} \\ \|t_\infty^\perp\| &\leq \frac{1}{2} \xi \|\tilde{t}_0 - t_0\| \quad , \quad \xi = \frac{\kappa}{(1-\kappa) \cos \theta_0} \end{aligned}$$

et les encadrements :

$$\frac{1}{2}(1 - \xi) \leq \alpha \leq \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad , \quad \frac{1}{2}(1 - \xi') \leq \beta \leq \frac{1}{2}(1 + \xi')$$

ce qui permet d'écrire, en tenant compte de la définition de θ_0 :

$$M_{0,\infty} + \tilde{M}_{0,\infty} \leq \left(\frac{1}{2} + \xi + \xi' + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\cos \theta_0} \right) \xi \xi' \right) M_0 = \Lambda M_0 \quad (6.14)$$

Cette majoration relie l'écart de compatibilité initial (c'est à dire sur les *données*) M_0 à la somme des écarts de compatibilité entre la solution (v_∞, t_∞) et les estimations initiales (\tilde{v}_0, t_0) (écart $M_{0,\infty}$) et (v_0, \tilde{t}_0) (écart $\tilde{M}_{0,\infty}$).

Dans le cas linéaire, on a bien entendu $\xi = \xi' = 0$ et $\Lambda = \frac{1}{2}$. Si l'on reprend la figure 6.6 on voit que (v_∞, t_∞) est le centre du rectangle dont la diagonale est définie par les estimations initiales (\tilde{v}_0, t_0) et (v_0, \tilde{t}_0) . En interprétant les mesures comme des aires, M_0 est la surface du rectangle de diagonale $[(\tilde{v}_0, t_0); (v_0, \tilde{t}_0)]$, $M_{0,\infty}$ celle du rectangle de diagonale $[(\tilde{v}_0, t_0); (v_\infty, t_\infty)]$ et $\tilde{M}_{0,\infty}$ du rectangle de diagonale $[(v_\infty, t_\infty); (v_0, \tilde{t}_0)]$. (6.14) devient dans ce cas une égalité avec $\Lambda = \frac{1}{2}$.

Dans le cas général, si la non linéarité n'est pas trop forte, c'est à dire η et η' sont suffisamment petits, ξ et ξ' le sont aussi, si bien que l'on peut dans ce cas supposer :

$$M_{0,\infty} + \tilde{M}_{0,\infty} \leq \Lambda M_0 \quad \text{avec} \quad \frac{1}{2} \leq \Lambda < 1 \quad (6.15)$$

Si toutefois cette relation ne peut être vérifiée, on peut reprendre cette analyse à l'étape n de la suite, c'est à dire prendre comme données initiales v_n et t_n . Pour n suffisamment grand, le voisinage \mathcal{V} de (v_∞, t_∞) dans lequel on a à travailler est alors assez restreint pour que la non linéarité de DN soit faible de sorte que l'on vérifie :

$$M_{n,\infty} + \tilde{M}_{n,\infty} \leq \Lambda M_n \quad \text{avec} \quad \frac{1}{2} \leq \Lambda < 1 \quad (6.16)$$

Ces relations s'interprètent de la façon suivante : la mesure M_0 de la compatibilité des données initiales v_0 et t_0 se partage en deux termes $M_{0,\infty}$ et $\tilde{M}_{0,\infty}$ qui situent ces données par rapport à la solution compatible (v_∞, t_∞) . Celle-ci est en quelque sorte optimale puisqu'elle contient à la fois le caractère CA de v_0 et le caractère SA de t_0 .

Dans la pratique, les données aux limites initiales v_0 et t_0 fournies par les solutions $S(\underline{w}, \{p_i\})$ et $S^*(\underline{w}, \{p_i\})$ ne présentent pas une incompatibilité trop forte si le modèle de comportement est bien choisi, puisque l'écart entre $S(\underline{w}, \{p_i\})$ et $S^*(\underline{w}, \{p_i\})$ a déjà été minimisé. On exploite donc dans l'algorithme (6.3) les applications DN et ND *au voisinage* de v_0 et t_0 , c'est à dire dans une zone limitée pour laquelle on peut supposer la non-linéarité suffisamment faible de sorte que les propriétés énoncées sont valables.

6.4 Mesure de l'écart entre solutions

6.4.1 Définition d'un écart

On considère, pour une structure de comportement donné, deux évolutions repérées par les indices (1) et (2). Ces évolutions sont les solutions (S_1) et (S_2) d'un problème *direct*, pour les conditions aux limites notées (1) et (2) respectivement. L'état initial est supposé identique dans les deux problèmes directs. Une mesure d'*écart entre les solutions* (S_1) et (S_2) doit posséder les propriétés suivantes :

$$\left| \begin{array}{ll} e(S_1, S_2) = e(S_2, S_1) & \text{(symétrie)} \\ e(S_1, S_2) \geq 0 & \text{(positivité)} \\ e(S_1, S_2) = 0 \Rightarrow S_1 \equiv S_2 \end{array} \right.$$

Deux évolutions sont considérées comme proches lorsque leur écart est faible. Quand cet écart s'annule, les deux solutions sont *confondues*. Il faut noter que cet écart n'est pas une distance puisque l'inégalité triangulaire n'est pas a priori vérifiée. On va donc dans cette section proposer et examiner différents écarts.

6.4.2 Ecarts quadratiques

Cette catégorie d'écarts repose sur l'écart quadratique des conditions aux limites en effort et en vitesse des deux évolutions, sur des portions données Γ^v et Γ^f de la frontière de la structure (sur la configuration de référence, ce qui explique l'indice 0 dans Γ). Cette norme L^2 est ensuite intégrée en temps. On définit donc :

$$J_v(\Gamma^v, T) = \int_0^T \int_{\Gamma^v} \frac{1}{2} \|\underline{v}^1 - \underline{v}^2\|_{(t)}^2 dS dt$$

$$J_f(\Gamma^f, T) = \int_0^T \int_{\Gamma^f} \frac{1}{2} \|\underline{T}^1 - \underline{T}^2\|_{(t)}^2 dS dt$$

Les dimensions physiques de ces intégrales sont différentes ; on introduit donc les grandeurs :

$$J_v^0(\Gamma^v, T) = \int_0^T \int_{\Gamma^v} \frac{1}{2} \|\underline{v}^1 + \underline{v}^2\|_{(t)}^2 dS dt$$

$$J_f^0(\Gamma^f, T) = \int_0^T \int_{\Gamma^f} \frac{1}{2} \|\underline{T}^1 + \underline{T}^2\|_{(t)}^2 dS dt$$

qui permettent de normaliser J_v et J_f pour par exemple construire l'écart global :

$$J(\gamma, \Gamma^v, \Gamma^f, T) = \gamma \frac{J_v(\Gamma^v, T)}{J_v^0(\Gamma^v, T)} + (1 - \gamma) \frac{J_f(\Gamma^f, T)}{J_f^0(\Gamma^f, T)}$$

où $\gamma \in [0, 1]$ est un paramètre de pondération qui dépend de la qualité relative accordée aux données en force ou en vitesse, puisque l'une des grandeurs correspond généralement à un champ auquel on a expérimentalement accès.

Pour fixer les idées, on considère le cas où on connaît, à tout instant, l'effort sur toute la frontière $\partial\Omega$ et la vitesse sur une partie $\partial\Omega^{v,f}$ de celle-ci. C'est la situation que l'on rencontre dans l'essai aux barres de Hopkinson puisque la vitesse *et* l'effort sont connus sur les extrémités de l'échantillon (portion $\partial\Omega^{v,f}$ de la frontière) et que la surface latérale est libre de contraintes (portion $\partial\Omega^f$, et $\partial\Omega^v = \emptyset$). Les deux calculs directs qui s'imposent dans ce cas (conformément au principe de réduction de \mathcal{R}^{ad} , tableau 6.1) sont :

- Problème (1), solution S_1 :
vitesse imposée sur $\partial\Omega^{v,f}$, effort nul sur $\partial\Omega^f$,
- Problème (2), solution S_2 :
effort imposé sur $\partial\Omega^{v,f}$, effort nul sur $\partial\Omega^f$.

La comparaison des vitesses de (1) et (2) se fait sur $\Gamma^v \subset \partial\Omega^{v,f}$ et des efforts sur $\Gamma^f \subset \partial\Omega^{v,f}$. Dans les applications, on choisira par exemple $\Gamma^v = \emptyset$ et $\Gamma^f = \partial\Omega^{v,f}$ situation qui correspond à l'approche intuitive consistant à calculer les efforts à partir des vitesses données et les comparer aux efforts donnés. Ceci dissymétrise bien entendu le problème mais le simplifie aussi puisque la solution (2) n'a pas à être calculée.

Une variante consiste à affecter, en chaque point de la frontière et toujours selon la confiance accordée à la mesure en ce point, une pondération $\beta(X) \in [0, 1]$, $X \in \partial\Omega$ (la valeur $\beta = 0$ correspondant à un point où l'on ne réalise aucune mesure et où la comparaison n'a pas lieu d'être). On écrit alors :

$$J_v(T) = \int_0^T \int_{\Gamma} \beta_v(X) \|\underline{v}^1 - \underline{v}^2\|_{(t)}^2 dS dt$$

$$J_f(T) = \int_0^T \int_{\Gamma} \beta_f(X) \|\underline{T}^1 - \underline{T}^2\|_{(t)}^2 dS dt$$

Pour combiner ces deux écarts, il faut bien entendu comme précédemment les normaliser.

PROPRIÉTÉ : Dans le cadre de l'hypothèse (H1) (voir section 5.2.1), si $\Gamma^v \cup \Gamma^f = \partial\Omega$ ou si $\beta_v(X) + \beta_f(X) > 0$ pour tout $X \in \partial\Omega$, si $J = 0$ (nom générique pour l'un quelconque des écarts définis plus haut) alors les solutions S_1 et S_2 sont identiques. \diamond

En effet, si $J = 0$ on a, sous les hypothèses données, au moins l'un des termes $\|\underline{v}^1 - \underline{v}^2\|$ ou $\|\underline{T}^1 - \underline{T}^2\|$ qui est nul c'est à dire égalité soit des efforts, soit des vitesses en *tout* point de la frontière ; on sait qu'alors la solution au problème d'évolution est unique.

Cet écart a une signification "visuelle" puisqu'en un point donné, il mesure l'écart entre les deux courbes représentant l'histoire des conditions aux limites en ce point (il faut cependant se méfier puisque, lorsque la pente des courbes comparées devient grande, l'écart quadratique augmente bien plus rapidement que ce qu'un examen visuel des courbes ne laisse croire). Sa signification mécanique reste cependant très réduite puisque les écarts J_v et J_f ne représentent pas des grandeurs énergétiques directement comparables (avec l'énergie globale de la structure par exemple). Les écarts proposés dans la suite tentent donc de pallier cet inconvénient.

6.4.3 Ecarts énergétiques

Principe

Considérons un système physique dont l'état est repéré par un champ (tensoriel) $x \in E$ ($E \sim \mathbb{R}^n$). A cet état x on suppose qu'il correspond une grandeur scalaire $W(x)$ appelée *énergie potentielle du système* qui caractérise l'état x . On fait de plus l'hypothèse :

$$W : x \mapsto W(x) \text{ est convexe}$$

Une variation d'état $x \rightarrow x + \delta x$ nécessite un certain travail (la notation $\langle ., . \rangle$ représente le crochet de dualité entre E et E^*) :

$$W(x + \delta x) - W(x) = \left\langle \frac{\partial W}{\partial x}, \delta x \right\rangle + O(\delta x^2)$$

dans la mesure où W est supposée différentiable. Ce travail est produit par la grandeur duale (par rapport à l'énergie W) $y \in E^*$, appelée *force associée* :

$$y = \frac{\partial W}{\partial x}$$

Le crochet de dualité $\langle y, x \rangle$ a par définition la dimension d'une énergie. On peut définir, par transformation de Legendre, une énergie duale ou complémentaire W^* , dépendant de la force associée :

$$W^*(y) = \sup_{\xi \in E} \{ \langle y, \xi \rangle - W(\xi) \} \quad (6.17)$$

de sorte que soient vérifiées de façon équivalente les *relations de comportement* :

$$y = \frac{\partial W}{\partial x} \iff x = \frac{\partial W^*}{\partial y} \quad (6.18)$$

puisque W (et par construction W^*) est convexe.

On considère à présent deux états distincts du système x^1 et x^2 . On cherche à quantifier la différence entre ces deux états, par une quantité ayant la dimension d'une énergie. La première idée consiste à associer la différence des énergies des deux états $|W(x^1) - W(x^2)|$. Cette quantité est bien entendu symétrique et positive mais n'est pas discriminante puisque deux états distincts peuvent posséder la même énergie et annuler $W(x^1) - W(x^2)$.

Il s'agit donc d'utiliser les relations de comportement et de décrire les différences entre les deux états par *dualité* en faisant "travailler" la force associée à l'un des états avec l'autre état et vice versa. Posons pour cela :

$$e(x, y) = W(x) + W^*(y) - \langle y, x \rangle \quad \forall (x, y) \in E \times E^* \quad (6.19)$$

pour tout couple (x, y) dans $E \times E^*$.

PROPRIÉTÉ : le défaut de compatibilité vérifie :

$$\begin{aligned} e(x, y) &\geq 0 \quad \forall (x, y) \in E \times E^* \\ e(x, y) &= 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x, y) \text{ vérifie (6.18)} \end{aligned} \quad \diamond$$

La quantité $e(x, y)$ caractérise l'écart du couple (x, y) par rapport aux relations de comportement (6.18) ; autrement dit, $e(x, y)$ représente le défaut de compatibilité de la force y lorsque l'on se place dans l'état x , ou, réciproquement, le défaut de l'état x lorsque la force est y . La seconde partie de la propriété découle de la transformation de Legendre : si $e(x, y) = 0$, on constate que x est l'élément ξ qui réalise l'extrémum dans la relation (6.17) et qui est unique par convexité de $W(\xi)$; il vérifie par conséquent la première relation de comportement (6.18).

On applique à présent ce défaut de compatibilité aux états x^1 et x^2 , et à leurs forces associées y^1 et y^2 . On utilise donc les quantités $e(x^1, y^2)$ et $e(x^2, y^1)$ qui permettent de construire la fonction Δ , *symétrique* et à valeurs positives :

$$\begin{aligned} \Delta : (E \times E^*)^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x^1, y^1, x^2, y^2) &\mapsto e(x^1, y^2) + e(x^2, y^1) \end{aligned}$$

Cette expression se modifie avantageusement lorsqu'on lui retranche $e(x^1, y^1)$ et $e(x^2, y^2)$, qui sont par hypothèse nuls (états du système) :

$$\begin{aligned} \Delta &= W(x^1) + W^*(y^2) - \langle y^2, x^1 \rangle - W(x^1) - W^*(y^1) + \langle y^1, x^1 \rangle \\ &\quad + W(x^2) + W^*(y^1) - \langle y^1, x^2 \rangle - W(x^2) - W^*(y^2) + \langle y^2, x^2 \rangle \end{aligned}$$

c'est à dire :

$$\Delta(S_1, S_2) = \Delta(x^1, y^1, x^2, y^2) = \langle y^2 - y^1, x^2 - x^1 \rangle, \quad (6.20)$$

en notant $S_i = (x^i, y^i)$ une solution, c'est à dire un couple qui vérifie les relations de comportement. Cette expression montre que la description de l'écart se fait par dualité ; elle ne fait de plus pas intervenir explicitement les énergies potentielle et complémentaire : seul l'état et ses variations locales au premier ordre (via y) entrent dans l'expression de Δ . On a la

PROPRIÉTÉ : l'écart Δ vérifie, pour tout couple de solutions (S_1, S_2) :

$$\left| \begin{array}{ll} \Delta(S_1, S_2) = \Delta(S_2, S_1) & \text{(symétrie)} \\ \Delta(S_1, S_2) \geq 0 & \text{(positivité)} \\ \Delta(S_1, S_2) = 0 \Rightarrow S_1 \equiv S_2 & \end{array} \right. \quad \diamond$$

puisque $\Delta(S_1, S_2) = 0$ entraîne la nullité de $e(x^1, y^2)$ et de $e(x^2, y^1)$, les couples (x^1, y^2) et (x^2, y^1) vérifient le comportement et sont par suite égaux. Cet écart entre solutions est, comme voulu, de la dimension d'une énergie : c'est le travail de la différence des forces associées dans la différence des états.

Une autre manière de construire Δ est de remarquer que l'hypothèse de convexité faite sur $W(x)$ entraîne la monotonie de l'opérateur de comportement :

$$\partial W : x \in E \mapsto \frac{\partial W}{\partial x} \in E^*$$

La condition de monotonie s'écrit alors simplement :

$$0 \leq \langle \partial W(x^2) - \partial W(x^1), x^2 - x^1 \rangle = \langle y^2 - y^1, x^2 - x^1 \rangle = \Delta(S_1, S_2)$$

mais ce point de vue ne permet pas d'introduire le défaut de compatibilité $e(x, y)$.

D'autre part, la formulation est totalement symétrique en x et en y puisqu'on peut utiliser indifféremment $W(x)$ ou $W^*(y)$ comme potentiel de départ, l'hypothèse de convexité et la transformation de Legendre assurant l'équivalence.

Dans le cas de potentiels énergétiques quadratiques (si $W(x)$ est quadratique il en est de même pour $W^*(y)$ et vice versa) les relations de comportement sont linéaires. Pour un état x et une force y quelconques, on a la relation :

$$2e(x, y) = \Delta(S_x, S_y) \quad (6.21)$$

ce qui montre que, pour (x, y) donnés, $e(x, y)$ s'interprète comme l'écart entre la solution $S_x = (x, \partial W/\partial x)$ à " x imposé" et la solution $S_y = (\partial W^*/\partial y, y)$ à " y imposé". En effet, l'énergie et le comportement s'écrivent dans ce cas :

$$\begin{aligned} W(x) &= \frac{1}{2}x \cdot K \cdot x & \text{et} & & W^*(y) &= \frac{1}{2}y \cdot K^{-1} \cdot y \\ y &= K \cdot x & \text{et} & & x &= K^{-1} \cdot y \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} e(x, y) &= \frac{1}{2}x \cdot K \cdot x + \frac{1}{2}y \cdot K^{-1} \cdot y - x \cdot y \\ &= \frac{1}{2}(x - K^{-1} \cdot y) \cdot (K \cdot x - y) \\ &= \frac{1}{2}(x - K^{-1} \cdot y) \cdot K \cdot (x - K^{-1} \cdot y) = \frac{1}{2}(y - K \cdot x) \cdot K^{-1} \cdot (y - K \cdot x) \\ &= \frac{1}{2}\left(x - \frac{\partial W^*}{\partial y}\right) \cdot \left(\frac{\partial W}{\partial x} - y\right) = \frac{1}{2}\Delta(S_x, S_y) \end{aligned}$$

La troisième ligne permet d'interpréter $e(x, y)$ ou Δ comme une énergie W associée à la différence des champs x et $x(y) = K^{-1} \cdot y$ ou, ce qui est équivalent, comme une énergie complémentaire W^* associée à la différence des champs y et $y(x) = K \cdot x$.

Dans le cas linéaire, Δ possède en fait les propriétés d'une distance. En effet, on peut écrire :

$$\Delta(S_1, S_2) = (x^1 - x^2) \cdot (y^1 - y^2) = (K^{1/2}x^1 - K^{1/2}x^2) \cdot (K^{-1/2}y^1 - K^{-1/2}y^2) = \|K^{1/2}x^1 - K^{1/2}x^2\|^2$$

avec $K^{1/2}$ une racine de K (K est positive par convexité de W), ce qui fait de $\Delta^{1/2}$ une distance dans l'espace des quantités de type $K^{1/2}x$ ou $K^{-1/2}y$, espace intermédiaire à l'espace des états et l'espace de forces associées.

Ces propriétés sont évidemment caduques lorsque la loi de comportement est non linéaire ; on conservera tout de même le vocabulaire d'énergie associée à la différence des solutions pour la quantité $\Delta(S_1, S_2)$. On peut cependant, lorsque l'on se place au voisinage d'une solution donnée et que les relations de comportement sont suffisamment régulières, linéariser ce comportement pour obtenir localement une inégalité triangulaire. En reprenant l'idée de la racine de K , si la relation de comportement $y = y(x)$ peut se mettre sous la forme $y = (f \circ f)(x)$ avec f bijective, on constate que $f(x)$ et $f^{-1}(y)$ jouent des rôles équivalents et que Δ devient une distance, localement dans l'espace des $f(x)$ et $f^{-1}(y)$.

Formulation pour les matériaux standards

Dans le cadre des matériaux standards (Halphen, Nguyen [53]), la description du comportement du matériau se fait grâce à des potentiels énergétiques. Ces potentiels sont supposés convexes de sorte que la démarche précédente leur est applicable.

Le comportement est généralement décrit par un potentiel d'énergie libre ; on note ψ cette énergie libre massique. Elle dépend de l'état de déformation défini par le tenseur de déformation (HPP) $\underline{\underline{\varepsilon}}$, de l'état interne repéré par le vecteur $\underline{\alpha}$ et de la température T . L'énergie libre de la structure est donc :

$$W(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\alpha}, T) = \int_{\Omega} \rho \psi(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\alpha}, T) d\Omega$$

L'énergie cinétique globale de la structure s'écrit :

$$K(\underline{v}) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho \underline{v}^2 d\Omega$$

On définit alors une fonctionnelle H correspondant à l'énergie totale de la structure :

$$H(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\alpha}, T, \underline{v}) = W(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\alpha}, T) + K(\underline{v})$$

Cette fonctionnelle est proche du Hamiltonien de la structure puisque seul le terme de potentiel des efforts extérieurs donnés n'est pas pris en compte. Ceci se justifie dans le cadre présent où les conditions aux limites sont imposées de manière différente dans chaque problème direct d'évolution. Comme ψ est $\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\alpha}$ -convexe et T -concave, H est $\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\alpha}, \underline{v}$ -convexe et T -concave. Les variables de forces associées sont définies par les relations de comportement :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} &= \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}, & \underline{A} &= \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\alpha}}, \\ s &= -\frac{\partial \psi}{\partial T} \quad \text{et} \quad \underline{p} = \frac{\partial}{\partial \underline{v}} \left(\frac{1}{2} \rho \underline{v}^2 \right) = \rho \underline{v} \end{aligned}$$

ou, de manière équivalente, en introduisant une énergie complémentaire $H^*(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{A}, s, \underline{p})$, obtenue par transformation de Legendre par rapport au produit de dualité :

$$\langle (\underline{\underline{\sigma}}, \underline{A}, s, \underline{p}), (\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\alpha}, T, \underline{v}) \rangle = \int_{\Omega} \left[\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{A} \cdot \underline{\alpha} - \rho T s + \underline{p} \cdot \underline{v} \right] d\Omega$$

dont on vérifie qu'il a la dimension d'une énergie. Les résultats du paragraphe 6.4.3 appliqués au couple (H, H^*) fournissent la fonctionnelle :

$$\begin{aligned} \Delta(S_1, S_2) &= \int_{\Omega} \left[(\underline{\underline{\sigma}}^1 - \underline{\underline{\sigma}}^2) : (\underline{\underline{\varepsilon}}^1 - \underline{\underline{\varepsilon}}^2) + (\underline{A}^1 - \underline{A}^2) \cdot (\underline{\alpha}^1 - \underline{\alpha}^2) \right. \\ &\quad \left. - \rho (T^1 - T^2) (s^1 - s^2) + (\underline{p}^1 - \underline{p}^2) \cdot (\underline{v}^1 - \underline{v}^2) \right] d\Omega \end{aligned} \quad (6.22)$$

qui mesure l'écart entre les deux solutions $S_i = (\underline{\underline{\varepsilon}}^i, \underline{\alpha}^i, T^i, \underline{v}^i, \underline{\underline{\sigma}}^i, \underline{A}^i, s^i, \underline{p}^i)$ ($i = 1, 2$), représentatives de l'état de la structure suite à son évolution sur l'intervalle de temps $[0, T]$. Le fait qu'apparaissent les variables d'état implique que le contrôle de l'écart se fait aussi dans une certaine mesure sur toute l'histoire de l'évolution sur $[0, T]$. On peut bien entendu affiner ce contrôle en introduisant des écarts modifiés, tels que :

$$\int_0^T \beta(t) \Delta(S_1, S_2) dt \quad \text{ou} \quad \sup_{t \in [0, T]} \Delta(S_1, S_2)$$

où $\beta(t)$ est une fonction de pondération définie sur $[0, T]$. D'autre part, le domaine de contrôle, noté ici Ω , ne représente pas forcément la structure entière mais peut ne représenter qu'un sous domaine de celle-ci.

On peut noter la nécessité d'utiliser dans cette démarche une transformation de Legendre par rapport à *toutes* les variables puisque les résultats reposent sur la convexité de la fonctionnelle par rapport à tous ses arguments. La seule transformation partielle possible est reliée à l'indépendance des termes d'énergie cinétique et d'énergie libre, puisque W et K ne sont couplées par aucune variable et chacune de ces quantités est *convexe* par rapport à ses arguments.

Pour un solide élastique (tenseur des modules élastiques E), par exemple, en équilibre, l'énergie élastique s'écrit :

$$W(\underline{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\varepsilon} : E : \underline{\varepsilon} d\Omega$$

Ce potentiel permet d'écrire le comportement $\sigma = \partial W / \partial \underline{\varepsilon} = E : \underline{\varepsilon}$ et de construire l'énergie complémentaire $W^*(\sigma)$:

$$W^*(\underline{\sigma}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\sigma} : E^{-1} : \underline{\sigma} d\Omega$$

par rapport au crochet de dualité :

$$\langle \underline{\sigma}, \underline{\varepsilon} \rangle = \int_{\Omega} \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon} d\Omega$$

L'écart en comportement s'écrit dans ce cas :

$$e(\underline{\varepsilon}, \underline{\sigma}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\varepsilon} : E : \underline{\varepsilon} d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\sigma} : E^{-1} : \underline{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega} \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon} d\Omega$$

et si l'on considère deux solutions $(\underline{\varepsilon}^i, \underline{\sigma}^i)$, $i = 1, 2$ leur écart sera mesuré par :

$$\Delta(\underline{\varepsilon}^1, \underline{\sigma}^1, \underline{\varepsilon}^2, \underline{\sigma}^2) = \int_{\Omega} (\underline{\sigma}^1 - \underline{\sigma}^2) : (\underline{\varepsilon}^1 - \underline{\varepsilon}^2) d\Omega$$

Dans le cas où la solution (1) est solution d'un problème de Dirichlet (déplacement imposé sur toute la frontière) et la solution (2), d'un problème de Neumann (effort donné sur la frontière) si l'on note ε la déformation de la solution (1), (solution cinématiquement admissible) et σ la contrainte de la solution (2), (solution statiquement admissible), on retrouve l'erreur en loi de comportement proposée par Ladevèze (Ladevèze [64]) :

$$\Delta = \int_{\Omega} (\underline{\sigma} - E : \underline{\varepsilon}) : (E^{-1} : \underline{\sigma} - \underline{\varepsilon}) d\Omega = \int_{\Omega} (E^{-1} : \underline{\sigma} - \underline{\varepsilon}) : E : (E^{-1} : \underline{\sigma} - \underline{\varepsilon}) d\Omega$$

Cette dernière expression s'interprète comme une énergie élastique associée au champ de déformation $(E^{-1} : \sigma - \varepsilon)$ (resp. au champ de contraintes $(\sigma - E : \varepsilon)$) de la différence entre les solutions (2) et (1), puisque la loi est linéaire.

Dans le cadre des matériaux standards, on utilise un second potentiel, le potentiel de dissipation (convexe lui aussi), pour décrire l'évolution des variables internes :

$$\dot{\underline{A}} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \underline{A}} \quad \xleftrightarrow{\text{Tr. Legendre}} \quad \underline{A} = -\frac{\partial \varphi^*}{\partial \dot{\underline{A}}}$$

le défaut de compatibilité en loi dissipative est alors (d'après 6.19) :

$$e_{\varphi}(\dot{\underline{A}}, \underline{A}) = \varphi(\underline{A}) + \varphi^*(\dot{\underline{A}}) + \underline{A} \cdot \dot{\underline{A}}$$

tandis que l'écart de deux évolutions (1) et (2) sur la partie dissipative du comportement s'écrit :

$$\delta(S_1, S_2) = - \int_{\Omega} (\underline{A}^1 - \underline{A}^2) \cdot (\underline{\dot{\alpha}}^1 - \underline{\dot{\alpha}}^2) d\Omega$$

Cet écart n'a pas la dimension d'une énergie mais d'une puissance ; on utilise plutôt sa forme intégrée en temps sur $[0, T]$, que l'on interprète comme une énergie "de dissipation" associée à la différence des solutions :

$$\mathcal{D}(S_1, S_2) = - \int_0^T \int_{\Omega} (\underline{A}^1 - \underline{A}^2) \cdot (\underline{\dot{\alpha}}^1 - \underline{\dot{\alpha}}^2) d\Omega dt$$

Ce type d'écart peut notamment être employé lorsque les lois d'état sont connues et que l'on cherche à quantifier l'écart uniquement sur la partie dissipative du comportement.

6.4.4 Ecart en puissance

Cet écart repose sur la formulation intégrée en temps du principe des puissances virtuelles donné au paragraphe 5.2 et dont on rappelle l'écriture :

$$\begin{aligned} M(S_1, S_2, t) &= \int_0^t \int_{\partial\Omega} (\underline{T}^1 - \underline{T}^2) (\underline{v}^1 - \underline{v}^2) dS d\tau \\ &= \underbrace{\int_0^t \int_{\Omega} (\underline{\sigma}^1 - \underline{\sigma}^2) : (\underline{\dot{\varepsilon}}^1 - \underline{\dot{\varepsilon}}^2) d\Omega d\tau}_A + \underbrace{\int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho (\underline{v}^1 - \underline{v}^2)_{(t)}^2 d\Omega}_B \end{aligned} \quad (6.23)$$

La positivité de $M(S_1, S_2, t)$ est assurée par la monotonie du comportement ($A \geq 0$) et par la positivité de B qui représente une énergie cinétique associée à la différence des solutions. $M(S_1, S_2, t)$ est bien entendu symétrique en S_1 et S_2 et comme on l'a prouvé au paragraphe 5.2, la nullité de M entraîne l'égalité des solutions S_1 et S_2 . M est donc une mesure de l'écart entre les évolutions (dont le nom vient de l'intégrande, qui a la dimension d'une puissance) qui prend en compte :

- le terme A, qui associe à la différence des évolutions une énergie liée à l'écart en comportement,
- le terme B, qui lui associe une énergie cinétique.

D'autre part, l'une des formes de M est une intégrale de frontière : le contrôle de la structure peut donc se ramener à son contrôle sur sa frontière, dans le sens où, si les écarts sur la frontière restent faibles, on sait que les champs mécaniques à l'intérieur de la structure présentent eux aussi des écarts faibles.

Dans le cadre des matériaux standards et pour des potentiels quadratiques, on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} A &= \int_0^t \int_{\Omega} (\underline{\sigma}^1 - \underline{\sigma}^2) : (\underline{\dot{\varepsilon}}^1 - \underline{\dot{\varepsilon}}^2) d\Omega d\tau = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\underline{\sigma}^1 - \underline{\sigma}^2) : (\underline{\varepsilon}^1 - \underline{\varepsilon}^2)|_{(t)} d\Omega \\ \mathcal{D}(S_1, S_2) &= - \int_0^T \int_{\Omega} (\underline{A}^1 - \underline{A}^2) \cdot (\underline{\dot{\alpha}}^1 - \underline{\dot{\alpha}}^2) d\Omega dt = - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\underline{A}^1 - \underline{A}^2) \cdot (\underline{\alpha}^1 - \underline{\alpha}^2)|_{(t)} d\Omega \end{aligned}$$

qui permettent d'écrire (d'après la définition (6.22) de Δ) :

$$\begin{aligned}
 M(S_1, S_2, t) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\underline{\sigma}^1 - \underline{\sigma}^2) : (\underline{\varepsilon}^1 - \underline{\varepsilon}^2)|_{(t)} d\Omega + B \\
 &= \frac{1}{2} \Delta(S_1, S_2) + \mathcal{D}(S_1, S_2) + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho (T^1 - T^2) (s^1 - s^2)|_{(t)} d\Omega}_{\Phi(S_1, S_2)} \\
 M(S_1, S_2, t) &= \frac{1}{2} \Delta(S_1, S_2) + \mathcal{D}(S_1, S_2) + \Phi(S_1, S_2) \quad (6.24)
 \end{aligned}$$

Dans l'expression (6.24) le terme $\Phi(S_1, S_2)$ représente une énergie associée à la différence des évolutions thermiques des solutions S_1 et S_2 . Ce terme s'annule dans le cas d'évolutions *isothermes* ou *adiabatiques*, puisque l'état initial (thermomécanique) est par hypothèse *identique* pour les deux évolutions. Pour un essai de compression dynamique, par exemple, on s'intéresse à un intervalle de temps $[0, T]$ suffisamment petit pour supposer l'évolution adiabatique. Dans le cas où il y a découplage des effets mécaniques et thermiques, le potentiel d'énergie libre peut s'écrire comme la somme $W(\underline{\varepsilon}, \underline{\alpha}, T) = W_m(\underline{\varepsilon}, \underline{\alpha}) + W_{\Phi}(T)$ d'une énergie mécanique et d'une énergie thermique. L'énergie $\Phi(S_1, S_2)$ s'interprète alors comme l'écart des évolutions S_1 et S_2 construit à partir du potentiel $W_{\Phi}(T)$ grâce à (6.19). On peut noter que $W_{\Phi}(T)$ est T -concave, mais la variable duale s étant définie comme l'opposé de $\partial W_{\Phi}/\partial T$, la positivité de l'écart Φ est assurée.

La relation (6.24) $M = \frac{1}{2} \Delta + \mathcal{D} + \Phi$, dans laquelle chacun des termes est *positif*, permet de comprendre comment le contrôle de l'écart des évolutions est réalisé. L'écart mesuré par M est *global* ce qui est somme toute compréhensible puisque le contrôle se restreint aux champs sur la frontière de la structure. M est la somme de l'écart $\frac{1}{2} \Delta$ portant sur les *lois d'état* et sur le contrôle en *énergie cinétique*, de l'écart \mathcal{D} relatif aux *lois de dissipation* et de l'écart *thermique* Φ (dans l'hypothèse de découplage). On a en particulier la majoration $M \geq \frac{1}{2} \Delta$.

Intégration temporelle

Comme on vient de le voir, dans le cadre des matériaux standards, les expressions A et B dans l'équation 6.23 sont explicitement intégrables en temps. Cette intégration conduit à la relation 6.24 qui *ne dépend que de l'état à l'instant t* . La conséquence est que les termes de 6.24 ne mesurent des écarts que sur la configuration actuelle (l'écart dû à la différence des histoires de chargement étant pris en compte par les paramètres internes et les forces thermodynamiques associées). L'idée est alors d'intégrer ces relations en temps sur $[0, T]$. Grâce à la relation :

$$\int_0^T (T-t) f(t) dt = \underbrace{\left[(T-t) \int_0^t f(\tau) d\tau \right]_0^T}_{=0} + \int_0^T \int_0^t f(\tau) d\tau = \int_0^T \int_0^t f(\tau) d\tau,$$

obtenue par intégration par parties, on peut écrire :

$$M_T(S_1, S_2) = \int_0^T M(S_1, S_2, t) dt = \int_0^T \int_{\partial\Omega} (T-t) (\underline{\mathcal{T}}^1 - \underline{\mathcal{T}}^2) (\underline{\mathcal{V}}^1 - \underline{\mathcal{V}}^2)|_{(t)} dS d\tau \quad (6.25)$$

Cette version de l'écart en puissance, intégrée en temps, permet ainsi un contrôle sur toute la durée de l'expérience, de manière homogène pour chaque instant (i.e. le *poids* accordé à l'écart $M(S_1, S_2, t)$ à l'instant t est *identique* $\forall t \in [0, T]$). Ce qui est intéressant avec cette intégration est qu'elle ne modifie quasiment pas l'expression initiale de M , notamment la propriété de contrôle par la frontière.

Bien évidemment, les expressions de $\Delta(S_1, S_2)$, $\mathcal{D}(S_1, S_2)$ et $\Phi(S_1, S_2)$ peuvent aussi être intégrées en temps. Elles exercent alors de la même façon un contrôle homogène en temps.

6.4.5 Commentaires

Remarque sur l'inégalité triangulaire

La définition de l'écart donnée au paragraphe 6.4.1 diffère de la définition d'une *distance* par l'inégalité triangulaire : celle-ci n'est en effet pas a priori vérifiée pour un écart. On peut cependant remarquer que les distances définies précédemment s'expriment toujours formellement comme une intégrale

$$\int_{t,\Omega} (x^2 - x^1) \cdot (y^2 - y^1) d\Omega dt$$

en temps et/ou en espace dans laquelle x^i et y^i , ($i = 1, 2$) représentent respectivement un champ mécanique et son champ dual.

Si les évolutions (1) et (2) sont suffisamment proches et si l'application $h : x \mapsto y$ (déterminée par la résolution du problème direct) peut être linéarisée au voisinage de x^1 (par exemple) on est en mesure d'écrire $y^2 = h(x^2) \simeq h(x^1) + H \cdot (x^2 - x^1) = y^1 + H \cdot (x^2 - x^1)$. La mesure d'écart représentée par l'intégrale ci-dessus devient donc, par *approximation*, une forme quadratique de l'écart $x^i - x^j$ pour tout couple de champs (x^i, x^j) dans un voisinage de x^1 .

CONSEQUENCE : au voisinage d'un point tel que x^1 où l'application h est différentiable, l'écart entre deux solutions du problème d'évolution peut être considéré comme quadratique, ce qui lui confère, *localement* les propriétés d'une distance. \diamond

On peut remarquer que la "taille" du voisinage sur lequel l'écart vérifie l'inégalité triangulaire (et est donc une distance) est liée à la non-linéarité de l'application h au point x^1 . Cette non-linéarité est par exemple déterminée par l'importance des termes d'ordre supérieur dans le développement de h (dans la mesure où ce développement existe).

Retour sur la solution du (PTI)

La solution au problème type idéalisé donnée au paragraphe 6.1 entraîne quelques remarques relatives à la définition de l'écart. On utilise la solution $S = (\underline{v}, \underline{\sigma})$ qui est plutôt "cinématiquement" admissible et la solution $S^*(\underline{v}^*, \underline{\sigma}^*)$ qui est plutôt "statiquement" admissible avec les données sur la frontière pour donner une solution $(\underline{v}, \underline{\sigma}^*)$ au problème de référence mais qui ne vérifie ni l'équilibre ni le comportement.

Les écarts tels que M ou Δ sont la somme de deux termes positifs : le premier (noté A, cf. relation 6.23) est l'écart associé au comportement et le second (B) relatif à l'énergie cinétique, c'est à dire à l'équilibre dynamique.

A évalue l'erreur sur le comportement lorsqu'on associe les efforts internes $\underline{\sigma}^*$ à la cinématique \underline{v} ; ce champ de contraintes n'est de plus pas en équilibre avec les efforts d'inertie $\rho \frac{dv}{dt}$: le terme B mesure ce défaut d'équilibre, si bien que l'on peut l'interpréter comme un critère d'admissibilité dynamique du couple $(\underline{v}, \underline{\sigma}^*)$. Il est donc possible en utilisant un écart pondéré $(1 - \gamma) A + \gamma B$ ($\gamma \in [0, 1]$) d'augmenter l'admissibilité dynamique de la solution au détriment de l'admissibilité du comportement ou vice versa.

Une autre approche est celle utilisée dans les problèmes de recalage de modèles vibratoires (Ladevèze, Maia, Proslier, Reynier [68], [65]). En effet, même si la répartition de masse dans une structure est a priori connue, elle peut présenter des défauts, qui, via la masse volumique, rend sujette à caution la relation "cinématique \leftrightarrow efforts d'inertie". Le cadre est celui des petites perturbations et le temps n'intervient pas explicitement (description dans l'espace des fréquences). La masse volumique, a priori constante, peut présenter une répartition qui n'est

pas optimale vis à vis de l'écart en énergie cinétique B, ce qui conduit à recalculer la répartition de masse, au même titre que la "rigidité" de la structure l'est par l'écart A.

Mise en œuvre numérique des écarts

Dans les sections précédentes trois écarts de nature et de signification différentes ont été construits. On compare donc ces trois écarts et on examine la faisabilité de leur mise en œuvre numérique.

L'écart quadratique J possède l'avantage d'être simple et d'une signification "visuelle" évidente puisqu'il mesure la distance entre deux courbes, considérées comme fonctions du temps. Par analogie aux méthodes de moindres carrés cet écart est celui qui, par sa simplicité, est le plus évident à construire. Le défaut de cet écart est sa signification physique qui reste très limitée. De plus un écart quadratique en effort n'est pas directement comparable à un écart quadratique en vitesse (dimension physiques différentes) ce qui rend leur pondération relative délicate si l'on désire les combiner. La mise en œuvre numérique d'un écart quadratique est assez simple puisque l'intégration ne porte que sur la frontière de la structure.

L'écart énergétique Δ (et ses dérivés) est lui un peu plus délicat à évaluer puisque l'intégration porte sur le volume de la structure. Par ailleurs, si sa construction n'est pas immédiate, sa signification physique est claire puisqu'il associe une *énergie* à la différence des deux évolutions prises en compte. Cette énergie peut de plus être décomposée en une somme de termes reliés chacun à un processus physique bien déterminé (relation (6.24)).

L'écart M est appelé *écart en puissance* car il correspond à la puissance définie par le produit de la différence des efforts par la différence des vitesses des deux solutions S_1 et S_2 . Son sens mécanique est explicité dans un cas particulier par la relation (6.24) : cet écart correspond à une mesure *globale* de l'écart des évolutions sans tenir compte des processus physiques *distincts* explicités par (6.24). Tout comme l'écart quadratique J , l'écart M est facile à évaluer puisque l'intégration se réduit à la frontière de la structure.

6.5 Résolution du problème type

Ce qui précède a servi à construire une solution du *problème type idéalisé*. Il s'agit à présent de faire le lien entre ce premier problème, que l'on s'est donné de manière idéale, et le *problème type*. Ce problème, on le rappelle, est le problème d'identification du comportement défini par la figure 4.1.

Par analogie avec la méthode utilisée pour le (PTI), la première idée que l'on a est de rechercher dans l'ensemble \mathcal{R}^{ad} des réponses admissibles du modèle un élément proche l'ensemble des données expérimentales, notées d (de façon générique). Pour faire cette comparaison, une projection (figure 6.9) des éléments de \mathcal{R}^{ad} sur l'espace des données expérimentales D (espace discret) est nécessaire. Le comportement (défini par le vecteur de paramètres $\{p_i\}$) que l'on recherche est ainsi celui qui correspond à l'argument du problème de minimisation :

$$\min_{S \in \mathcal{R}^{ad}} \|\text{proj}(S) - d\|_{exp}^2 \quad (6.26)$$

où la projection et la norme $\|\cdot\|_{exp}$ sont adaptées au format des données expérimentales, typiquement une norme L^2 en temps (discrète) pour chaque voie de mesure. Cette norme peut présenter des pondérations relatives à la qualité de chacune des composantes de d . L'espace des données expérimentales étant discret, l'ensemble $\text{proj}(\mathcal{R}^{ad})$ est fermé (puisque \mathcal{R}^{ad} l'est) ce qui donne une solution dans D et par suite au moins un antécédent dans \mathcal{R}^{ad} au problème de minimisation.

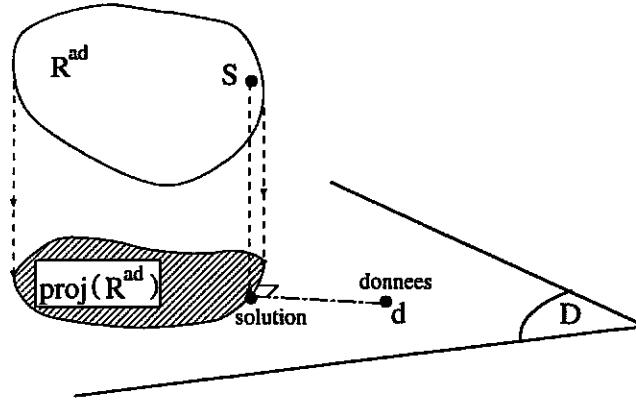


Figure 6.9 : Projection sur les données expérimentales

Réduction de \mathcal{R}^{ad}

La difficulté se retrouve cependant toujours dans la description de l'ensemble \mathcal{R}^{ad} qui est très vaste. On va donc se servir, comme pour le (PTI), des réductions de l'ensemble \mathcal{R}^{ad} , exposées au tableau 6.1. La question qui se pose alors est comment faire ces réductions à partir de l'ensemble des données expérimentales. Pour cela, il faut séparer les données expérimentales en trois types, $d = d^v \cup d^f \cup d^0$, les données d^v étant des informations de type vitesse sur la frontière, les données d^f de type effort sur la frontière et d^0 représentant tout le reste des données. Avec cette distinction, on suppose pouvoir déterminer les portions de frontière $\partial\Omega^v$ où la vitesse est donnée, $\partial\Omega^f$ où l'effort est donné, $\partial\Omega^{v,f}$ où vitesse et effort sont donnés et enfin $\partial\Omega^0$ où l'on ne connaît aucune de ces grandeurs. Le problème (6.26) peut donc se réécrire :

$$\min_{S \in \mathcal{R}^{ad}} \|\text{proj}_v(S) - d^v\|_{exp}^2 + \|\text{proj}_f(S) - d^f\|_{exp}^2 + \|\text{proj}_0(S) - d^0\|_{exp}^2 \quad (6.27)$$

dans laquelle les projections et les normes ont été adaptées aux formats respectifs des données expérimentales.

Intéressons nous au premier terme. $\text{proj}_v(S)$ n'est autre que la traduction de la vitesse de la solution S en terme de "vitesse expérimentale", c'est à dire au "format" de d^v . Dans le cas de l'essai SHPB, par exemple, cette projection correspond au passage de la vitesse en tout point de la face de l'échantillon à la vitesse moyenne de cette face, quantité effectivement mesurée. Il est donc généralement possible de trouver une solution $S \in \mathcal{R}^{ad}$ vérifiant $\text{proj}_v(S) = d^v$ (il y a plus de degrés de liberté pour S que pour d^v). L'opération inverse, à savoir déterminer le champ de vitesse sur la face à partir de la vitesse moyenne est donc délicate puisqu'il existe une infinité de solutions. Or, pour se ramener au (PTI), on a besoin de la vitesse en chaque point de la portion de frontière concernée. On considère donc un nombre J de champs \underline{v}_j^d , bien choisis, définis sur $\partial\Omega^v \cup \partial\Omega^{v,f}$, et qui représentent les données expérimentales, c'est à dire que leur projection n'est autre que d^v , soit :

$$\forall (\alpha_1, \dots, \alpha_J) \text{ tels que } \sum_{j=1}^J \alpha_j = 1 \text{ alors } \text{proj}_v \sum_{j=1}^J \alpha_j \underline{v}_j^d = d^v$$

Dans ce cas, si l'on prend $\sum_{j=1}^J \alpha_j \underline{v}_j^d$ comme conditions aux limites en vitesse sur $\partial\Omega^v \cup \partial\Omega^{v,f}$ dans un problème direct, la solution S de ce problème direct vérifiera $\text{proj}_v(S) = d^v$. En reprenant le cas de l'essai SHPB, les \underline{v}_j^d représentent des profils de vitesse sur la face de l'échantillon

qui sont physiquement acceptables (on suppose alors que leur combinaison l'est aussi). Les champs \underline{v}_j^d permettent ainsi de restreindre \mathcal{R}^{ad} en imposant la condition cinématique :

$$\underline{v} = \underline{v}^d = \sum_{j=1}^J \alpha_j \underline{v}_j^d \quad \text{sur} \quad \partial\Omega^v \cup \partial\Omega^{v,f} \quad (6.28)$$

Le premier terme de (6.27) est alors identiquement nul.

Pour le deuxième terme de (6.27), le raisonnement est identique : on introduit des champs \underline{T}_k^d qui permettent le relèvement des conditions expérimentales d^f dans l'espace des conditions aux limites du problème direct. Ils vérifient :

$$\forall (\beta_1, \dots, \beta_K) \text{ tels que } \sum_{k=1}^K \beta_k = 1 \text{ alors } \text{proj}_f \sum_{k=1}^K \beta_k \underline{T}_k^d = d^f$$

De la même façon, un problème direct de conditions aux limites en effort sur $\partial\Omega^f \cup \partial\Omega^{v,f}$ et de solution S^* , vérifiera $\text{proj}_f(S^*) = d^f$. Les champs \underline{T}_k^d permettent ainsi de restreindre \mathcal{R}^{ad} d'une seconde manière (statique), en imposant :

$$\underline{T} = \underline{T}^d = \sum_{k=1}^K \beta_k \underline{T}_k^d \quad \text{sur} \quad \partial\Omega^f \cup \partial\Omega^{v,f} \quad (6.29)$$

Le deuxième terme de (6.27) s'annule alors aussi. Si l'on reprend à nouveau l'essai SHPB, l'opération de projection, pour les efforts, revient à intégrer sur la face de l'échantillon l'effort $\underline{\sigma} \cdot \underline{n}$, puisque la donnée d^f correspond dans ce cas à la résultante des efforts sur la face.

Cette réduction de \mathcal{R}^{ad} permet, comme on l'a fait pour le (PTI), de travailler sur des solutions qui sont :

- plutôt cinématiquement admissibles, notées S , en choisissant comme conditions aux limites :

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \underline{v} &= \underline{v}^d = \sum_{j=1}^J \alpha_j \underline{v}_j^d \text{ sur } \partial\Omega^v \cup \partial\Omega^{v,f}, \\ \hookrightarrow \underline{T} &= \underline{T}^d = \sum_{k=1}^K \beta_k \underline{T}_k^d \text{ sur } \partial\Omega^f, \\ \hookrightarrow &\text{un champ de vitesses de contrôle } \underline{w} \text{ sur } \partial\Omega^\emptyset. \end{aligned}$$

- plutôt statiquement admissibles, notées S^* , en choisissant comme conditions aux limites :

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \underline{T} &= \underline{T}^d = \sum_{k=1}^K \beta_k^* \underline{T}_k^d \text{ sur } \partial\Omega^f \cup \partial\Omega^{v,f}, \\ \hookrightarrow \underline{v} &= \underline{v}^d = \sum_{j=1}^J \alpha_j^* \underline{v}_j^d \text{ sur } \partial\Omega^v, \\ \hookrightarrow &\text{un champ de vitesses de contrôle } \underline{w}^* \text{ sur } \partial\Omega^\emptyset. \end{aligned}$$

En ce qui concerne la zone $\partial\Omega^\emptyset$ où les données expérimentales ne permettent pas de fixer la vitesse ou l'effort, on peut en général, pour un problème d'identification du comportement, la supposer assez petite. En effet, comme on l'a déjà mentionné (section 4.3), pour déterminer correctement le comportement, il faut limiter la portion de frontière 'libre' $\partial\Omega^\emptyset$. Ceci peut par exemple être réalisé lors du choix de la partition de $\partial\Omega$ relativement à celle des données

expérimentales $d = d^v \cup d^f \cup d^0$. En effet, la “taille” de $\partial\Omega^0$ peut être diminuée en y extrapolant (avec un sens physique...) les champs de base \underline{v}_j^d et/ou \underline{T}_k^d . Si toutefois il subsiste une portion de frontière $\partial\Omega^0$, pas trop étendue mais qui nécessite un champ de contrôle \underline{w} ou \underline{w}^* , on choisit de représenter ce contrôle sur une base \underline{w}_r ($r = 1 \dots R$) de champs définis sur $\partial\Omega^0$, supposée suffisamment riche pour que le caractère inconnu des données sur cette portion de frontière soit effectivement respecté. On écrit donc :

$$\underline{w} = \sum_{r=1}^R \gamma_r \underline{w}_r \quad \text{et} \quad \underline{w}^* = \sum_{r=1}^R \gamma_r^* \underline{w}_r$$

Les solutions de \mathcal{R}^{ad} présentées précédemment seront donc notées :

$$S(\alpha_j, \beta_k, \gamma_r, p_i) \quad \text{et} \quad S^*(\alpha_j^*, \beta_k^*, \gamma_r^*, p_i)$$

où les p_i représentent les paramètres du comportement, identiques pour les deux solutions.

Dans le problème de minimisation (6.27), les deux premiers termes sont identiquement nuls pour respectivement $S(\alpha_j, \beta_k, \gamma_r, p_i)$ et $S^*(\alpha_j^*, \beta_k^*, \gamma_r^*, p_i)$ puisque $\text{proj}_v S(\alpha_j, \beta_k, \gamma_r, p_i) = d^v$ et $\text{proj}_f S^*(\alpha_j^*, \beta_k^*, \gamma_r^*, p_i) = d^f$. En revanche les expressions “croisées”, $\|\text{proj}_f S(\alpha_j, \beta_k, \gamma_r, p_i) - d^f\|_{exp}$ et $\|\text{proj}_v S^*(\alpha_j^*, \beta_k^*, \gamma_r^*, p_i) - d^v\|_{exp}$, représentent la compatibilité relative de ces solutions. On additionne donc les expressions de (6.27) pour $S(\alpha_j, \beta_k, \gamma_r, p_i)$ et $S^*(\alpha_j^*, \beta_k^*, \gamma_r^*, p_i)$ et on exprime la mesure de la compatibilité relative de ces solutions plutôt avec l'un des écarts introduits section 6.4. Le problème devient :

$$\min_{\substack{\alpha_j, \beta_k, \gamma_r, \\ \alpha_j^*, \beta_k^*, \gamma_r^*, p_i}} \mathcal{J}(\alpha_j, \beta_k, \gamma_r, \alpha_j^*, \beta_k^*, \gamma_r^*, p_i) \quad (6.30)$$

$$\begin{aligned} \text{avec} \quad \mathcal{J}(\alpha_j, \beta_k, \gamma_r, \alpha_j^*, \beta_k^*, \gamma_r^*, p_i) = & e \left(S(\alpha_j, \beta_k, \gamma_r, p_i), S^*(\alpha_j^*, \beta_k^*, \gamma_r^*, p_i) \right) \\ & + \mu \|\text{proj}_0 S(\alpha_j, \beta_k, \gamma_r, p_i) - d^0\|_{exp}^2 \\ & + \mu^* \|\text{proj}_0 S^*(\alpha_j^*, \beta_k^*, \gamma_r^*, p_i) - d^0\|_{exp}^2 \end{aligned}$$

On peut remarquer que les données d^0 sont comparées avec les deux solutions $S(\alpha_j, \beta_k, \gamma_r, p_i)$ et $S^*(\alpha_j^*, \beta_k^*, \gamma_r^*, p_i)$ avec des pondérations a priori égales, puisque les données d^0 ne présentent pas plus un caractère cinématique que statique. Cette approche impose certains commentaires :

- Si on estime qu'une donnée expérimentale est connue avec précision, on doit pouvoir l'imposer de manière (quasiment) exacte. Supposons pour fixer les idées que la vitesse soit bien définie sur une zone. Il suffit alors de choisir les éléments \underline{v}_j^d de base (quasiment) égaux sur la zone en question, la situation limite correspondant à un seul élément dans la base (connaissance parfaite de la condition).
- S'il n'y a pas de données de type d^0 le problème est simplifié et se réduit à la minimisation de l'incompatibilité entre les solutions $S(\alpha_j, \beta_k, \gamma_r, p_i)$ et $S^*(\alpha_j^*, \beta_k^*, \gamma_r^*, p_i)$. Dans le cas contraire, le choix des pondérations μ et μ^* est assez délicat : il est bien entendu plus important de traiter le problème de compatibilité (terme d'écart e) que la concordance avec les données d^0 . Les données d^0 correspondent en fait aux données complémentaires (section 4.3) qui ne sont ni des efforts ni des vitesses mesurées sans leur quantité duale.

- Le fait de travailler dans un espace de dimension finie (celui des $(\alpha_j, \beta_k, \gamma_r, \alpha_j^*, \beta_k^*, \gamma_r^*, p_i)$), régularise le problème. Les conditions aux limites sont en effet contraintes par la base qui les définit et leur assure une certaine régularité.
- Si certains paramètres de comportement sont connus a priori on les suppose bien entendu implicitement fixés pour la description de \mathcal{R}^{ad} . Ils disparaissent donc du problème d'optimisation.
- S'il existe des conditions de liaisons, comme par exemple la proportionnalité de la force et de la vitesse sur la face sortante de l'échantillon dans un essai SHPB classique, il suffit en fait de répercuter cette propriété dans les bases (\underline{v}_j^d) et (\underline{T}_k^d) et de prendre des coefficients α_j, β_k *identiques* pour les conditions en vitesse et en effort.
- Avec l'algorithme de construction de conditions compatibles de la section 6.3 et pour le jeu de paramètres identifiés, il est possible de bâtir un problème d'évolution idéalisé et représentatif des données expérimentales. Ceci reste bien entendu valable dans la mesure où le choix du modèle de comportement n'est pas "absurde", c'est à dire qu'il existe un élément de \mathcal{R}^{ad} qui soit raisonnablement proche des conditions aux limites expérimentales, de la même façon que pour le (PTI) ; une bonne estimation d'un tel élément de \mathcal{R}^{ad} est alors fourni par l'algorithme de construction de conditions compatibles (6.3).

Stabilité vis-à-vis des conditions expérimentales

La question qui se pose pour le problème (6.30) est la suivante : que se passe-t-il pour la solution de (6.30) lorsque l'on perturbe légèrement les données expérimentales ? Ceci pose le problème de la continuité de l'identification vis-à-vis des données expérimentales. En effet, pour bien poser le problème inverse, il est nécessaire (voir paragraphe 4.2) qu'une petite variation des données expérimentales n'entraîne qu'une faible modification de la solution construite initialement.

Pour cela, on utilise le résultat suivant relatif au (PTI) (section 6.1) qui affirme que la solution du (PTI) est *continue* par rapport aux conditions aux limites. La différence entre (6.30) et le (PTI) se trouve premièrement dans les termes supplémentaires entrant dans la fonctionnelle à minimiser et deuxièmement dans la liberté autorisée, au niveau des conditions aux limites pour la description de \mathcal{R}^{ad} , par le choix des bases (\underline{v}_j^d) , (\underline{T}_k^d) , (\underline{w}_r) .

La variation $d^0 \rightarrow d^0 + \delta d^0$ modifie les termes supplémentaires de \mathcal{J} de façon *continue* (termes quadratiques) ce qui impose à la solution de (6.30) une variation continue par rapport à δd^0 .

Une variation des données expérimentales en vitesse $d^v \rightarrow d^v + \delta d^v$ ou en effort $d^f \rightarrow d^f + \delta d^f$ conduit en principe à une *modification* des bases (\underline{v}_j^d) et (\underline{T}_k^d) . Si cette modification se fait de manière continue par rapport aux données expérimentales, on sait que la solution (6.30), comme pour le (PTI), est continue. On en déduit la continuité de la solution de (6.30) par rapport à δd^v et δd^f .

Comme il existe une incertitude de mesure, il est bon d'avoir une base "floue" qui permet de la prendre en compte. Cette liberté supplémentaire de la solution par rapport aux données mesurées d^v et d^f peut être obtenue de la manière suivante, dont l'avantage est de ne pas changer la nature du problème (6.30).

Supposons par exemple que d^v soit connu avec une incertitude relative ϵ . On peut alors donner aux α_j un degré de liberté supplémentaire en autorisant l'écart :

$$\left| \sum_{j=1}^J \alpha_j - 1 \right| \leq \epsilon$$

c'est à dire que $\text{proj}_v \sum_{j=1}^J \alpha_j \underline{v}_j^d = d^v$ à ϵ près. Cette condition se trouve aussi réalisée lorsque l'on augmente la fonctionnelle \mathcal{J} du terme $\kappa_v |\sum_{j=1}^J \alpha_j - 1|^2$ avec un coefficient κ_v bien choisi et d'autant plus grand que ϵ est faible ; ce terme s'interprète comme un "potentiel de rappel" vers la condition $\sum_{j=1}^J \alpha_j = 1$ qui possède l'avantage d'être différentiable.

Une façon équivalente de procéder, surtout si la base ne possède que peu d'éléments, est d'y inclure des vecteurs $\delta \underline{v}_j^d$, dont les combinaisons $\sum_{j'=1}^{J'} \alpha_{j'} \delta \underline{v}_{j'}^d$ représentent le bruit de la mesure. On impose dans ce cas $\sum_{j=1}^J \alpha_j = 1$ et $|\sum_{j'=1}^{J'} \alpha_{j'}| \leq \epsilon$. La manière la plus simple reste cependant celle qui utilise un potentiel de rappel.

Bien entendu, on procède de la même façon pour les données d^f et les conditions aux limites en effort. La fonctionnelle \mathcal{J} modifiée s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\alpha_j, \beta_k, \gamma_r, \alpha_j^*, \beta_k^*, \gamma_r^*, p_i) &= e \left(S(\alpha_j, \beta_k, \gamma_r, p_i), S^*(\alpha_j^*, \beta_k^*, \gamma_r^*, p_i) \right) \\ &+ \mu \|\text{proj}_0 S(\alpha_j, \beta_k, \gamma_r, p_i) - d^0\|_{exp}^2 + \mu^* \|\text{proj}_0 S^*(\alpha_j^*, \beta_k^*, \gamma_r^*, p_i) - d^0\|_{exp}^2 \\ &+ \kappa_v \left| \sum_{j=1}^J \alpha_j - 1 \right|^2 + \kappa_f \left| \sum_{k=1}^K \beta_k - 1 \right|^2 + \kappa_v^* \left| \sum_{j=1}^J \alpha_j^* - 1 \right|^2 + \kappa_f^* \left| \sum_{k=1}^K \beta_k^* - 1 \right|^2 \end{aligned}$$

Cette prise en compte du bruit sur les mesures n'est cependant pas toujours justifiée. En effet, supposons dans un premier temps, qu'on ne tienne pas compte du bruit sur les mesures (soit $\sum_{j=1}^J \alpha_j = 1$). On minimise donc l'écart entre les solutions S et S^* . Si la différence des conditions aux limites de S et S^* est de l'ordre du bruit (situation A, figure 6.10), on peut espérer construire, en tenant à présent compte du bruit, des solutions S et S^* d'écart *nul*, c'est à dire $S = S^*$. La prise en compte du bruit est dans ce cas justifiée ; le choix de κ_v , κ_f , κ_v^* et κ_f^* pour avoir une liberté sur les conditions aux limites de l'ordre de ϵ est délicat. Si en revanche cette

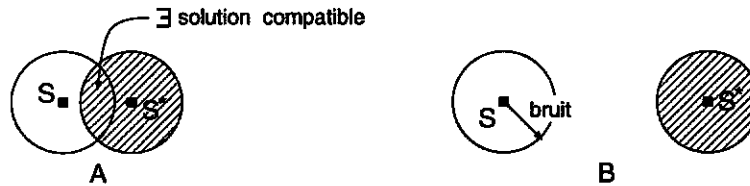


Figure 6.10 : Situations de prise en compte du bruit

différence est plus grande que le bruit (situation B, figure 6.10), le gain apporté par la prise en compte du bruit est négligeable si bien que le choix des κ dans l'expression de \mathcal{J} est simplifié : en les prenant "grands", on verrouille les conditions aux limites, sans tenir compte du bruit.

RÉSULTAT : la résolution du problème type (PT) d'identification du comportement choisie est *bien posée* dans la mesure où il *existe* une solution qui est localement *unique* et dont la dépendance vis à vis des conditions expérimentales est *continue*. \diamond

6.6 Conclusion de la deuxième partie

Dans un premier temps, l'analyse des données expérimentales a permis de poser correctement à la fois le problème de calcul de structure et par là, celui d'identification du comportement. Pour cela, on s'est intéressé à la résolution du problème *direct* qui est bien posé et qui constitue

l'outil de base pour la résolution du problème *inverse* d'identification du comportement. Le problème inverse est d'abord traité sous une forme idéalisée (PTI) puis tel qu'il se pose en pratique, à partir des données expérimentales (PT). Pour la résolution du problème inverse, un outil important a été introduit, la notion d'*écart* entre évolutions, dont on a proposé et étudié certaines expressions.

Partie III

APPLICATION A L'ESSAI AUX BARRES DE HOPKINSON

Modélisation de l'essai dynamique

RÉSUMÉ : On discute ici la manière de modéliser l'échantillon lors d'un test aux barres de Hopkinson. Cette modélisation consiste en un choix du type de loi de comportement et de la méthode de résolution utilisée pour résoudre le système différentiel régissant l'évolution de l'échantillon.

7.1 Problème direct

Comme on l'a vu en première partie de ce mémoire, le montage des barres de Hopkinson est correctement décrit par une modélisation unidimensionnelle. Dans le début de la deuxième partie, on a analysé les conditions qui permettent aussi d'adopter une modélisation unidimensionnelle pour l'échantillon. Les données expérimentales d'un essai aux barres de Hopkinson sont les efforts appliqués sur chaque face de l'échantillon au cours du temps ainsi que les vitesses de ces faces (ces données étant de nature unidimensionnelles). Il est donc justifié d'adopter la modélisation suivante : l'échantillon, de longueur L , occupe initialement sur l'axe réel Ox le domaine $x \in \Omega =]0, L[$. On cherche à décrire son évolution sur un intervalle de temps $t \in [0, T]$. De plus, on fait pour l'ensemble de cette partie, l'hypothèse des petites perturbations, ce qui permet de travailler sur le domaine $[0, L] \times [0, T]$. On notera ainsi $\sigma = \sigma_{xx}$, $\varepsilon = \varepsilon_{xx}$ la contrainte et la déformation uniaxiales sur l'axe x , $u = u_x$ le déplacement, $v = v_x$ la vitesse particulière sur cet axe.

Les conditions aux limites, dans cette modélisation, se réduisent à la donnée d'une vitesse ou d'une contrainte sur l'extrémité considérée, $x = 0$ ou $x = L$, pour tout instant $t \in [0, T]$; la contrainte en question est bien entendu obtenue en rapportant la résultante des efforts sur la face de l'échantillon à la surface unitaire ($\sigma = F/S$). L'équation d'équilibre se réduit, puisqu'il n'y a pas de forces de volume, à :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} - \rho \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad \forall (x, t) \in]0, L[\times]0, T[.$$

La relation de compatibilité des déformations $\varepsilon = \partial u / \partial x$ s'écrit de façon équivalente :

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0 \quad \forall (x, t) \in]0, L[\times]0, T[.$$

Pour poser correctement le problème d'évolution, il reste à compléter ces relations par les relations de comportement.

7.2 Choix d'une classe de comportement

Le choix d'une classe de comportement est bien sûr dicté par la nature des matériaux que l'on envisage de tester. Cependant, le modèle de comportement ne doit pas, pour des raisons pratiques, engendrer des coûts de calcul prohibitifs.

C'est pourquoi, une classe de modèle couramment retenue pour des simulations unidimensionnelles est la classe des modèles de Sokolowski-Malvern (Malvern [74]) qui se mettent sous la forme suivante :

$$\sigma(x, t) = E \varepsilon(x, t) + E \int_0^t g(\sigma, \varepsilon)_{(x, \tau)} d\tau \quad (7.1)$$

où E représente le module d'élasticité (unidimensionnel) et g une fonction de l'état de contrainte et de déformation. L'écriture différentielle de cette relation :

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + g(\sigma, \varepsilon) \quad (7.2)$$

permet d'interpréter $g(\sigma, \varepsilon)$ comme une *déformation anélastique* :

$$\begin{cases} \varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^{an} = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon^{an} \\ \dot{\varepsilon}^{an} = g(\sigma, \varepsilon) \end{cases}$$

L'équation (7.2) relie les incréments de contrainte et de déformation à partir et en fonction de l'état actuel de contrainte et de déformation. La forme intégrée (7.1) est une écriture implicite (en σ) de la formulation générale d'une relation de comportement comme fonctionnelle de l'histoire des déformations et fonction de l'état de déformation actuel.

La richesse de ce modèle provient de la grande latitude laissée par le choix de la fonction $g(\sigma, \varepsilon)$, la seule contrainte étant l'admissibilité thermodynamique du comportement ainsi construit. L'admissibilité thermodynamique revient dans ce cas à imposer une dissipation intrinsèque non négative pour toute histoire de chargement :

$$\forall \{ \varepsilon(\tau), \tau \in [0, T] \} \quad \forall t \in [0, T] \quad \sigma(t) \cdot \dot{\varepsilon}^{an}(t) \geq 0$$

7.2.1 Lois phénoménologiques

De nombreux auteurs ont proposé des relations de comportement issues généralement d'une approche expérimentale et fondées sur une approche phénoménologique.

L'approche initiale de Malvern (Malvern [74]) consiste à ajouter, à partir d'une courbe maîtresse $\sigma = f(\varepsilon)$ correspondant au comportement quasi-statique, une déformation anélastique proportionnelle à l'écart à cette courbe maîtresse :

$$g(\sigma, \varepsilon) = \frac{K}{E} (\sigma - f(\varepsilon))$$

D'autres expressions sont largement utilisées telles que la forme exponentielle, où g est fonction de l'écart relatif avec la courbe maîtresse :

$$g(\sigma, \varepsilon) = \varepsilon_0 \exp \left(\frac{\sigma - f(\varepsilon)}{C f(\varepsilon)} \right)$$

ou encore une forme en puissance, relative au rapport entre la contrainte effective et la contrainte que l'on aurait en régime quasi-statique :

$$g(\sigma, \varepsilon) = \varepsilon_0 \left(\frac{\sigma}{f(\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{n}}$$

La fonction

$$\begin{cases} g(\sigma, \varepsilon) = \dot{\varepsilon}_0 \left[\frac{\sigma/\sigma_s}{(1 + (E\varepsilon - \sigma)/\sigma_s)^N (1 - \mu T)} \right]^{1/M} & \text{si } \sigma \geq \sigma_s \\ g(\sigma, \varepsilon) = 0 & \text{si } \sigma \leq \sigma_s \end{cases} \quad (7.3)$$

est bien adaptée à la description du comportement dynamique des métaux (Tugcu, Neale [92], Zhao, Gary [96]) ; elle tient compte de l'effet thermique, le facteur $(1 - \mu T)$ ayant un effet adoucissant sur l'écrouissage. Le chargement est suffisamment bref pour être adiabatique avec une bonne approximation ce qui justifie l'hypothèse selon laquelle la puissance plastique est entièrement transformée en chaleur :

$$T = T_0 + \frac{1}{\rho C_p} \int_0^{\varepsilon_p} \sigma d\varepsilon_p = T_0 + \frac{1}{\rho C_p} \int_0^t \sigma g(\sigma, \varepsilon) dt \quad (7.4)$$

où C_p représente la chaleur massique.

7.2.2 Modèles rhéologiques

Ce type de schématisation permet, en utilisant des éléments, linéaires ou non, de type *ressort*, *amortisseur* et *patin* de construire une grande diversité de modèles de comportement.

Pour qu'un modèle de ce type entre dans la catégorie des modèles de Sokolowski-Malvern il doit nécessairement présenter une élasticité linéaire infinitésimale : l'assemblage doit être de la forme "ressort linéaire (module E) + assemblage quelconque". Si l'on se restreint strictement à la forme de comportement $\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma}/E + g(\sigma, \varepsilon)$ donnée plus haut, l'"assemblage quelconque" est nécessairement constitué de trois éléments (un de chaque type) en parallèle. En effet, la déformation de cet ensemble d'éléments en parallèle est connue, c'est $\varepsilon^{an} = \varepsilon - \sigma/E$. Les contraintes dans l'élément élastique et le patin sont fonction de ε^{an} soit $s_1(\varepsilon^{an})$; dans l'élément amortissant la contrainte est fonction du taux de déformation soit $s_2(\dot{\varepsilon}^{an})$. On a donc $\sigma = s_1(\varepsilon^{an}) + s_2(\dot{\varepsilon}^{an})$ soit, en supposant s_2 bijective, $\dot{\varepsilon}^{an} = s_2^{-1}(\sigma - s_1(\varepsilon^{an}))$ que l'on met, en explicitant ε^{an} sous la forme cherchée $\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma}/E + g(\sigma, \varepsilon)$.

Si l'"assemblage quelconque" n'est pas de la forme dont il est question plus haut (c'est à dire trois éléments - un de chaque type - en parallèle), le comportement ne peut s'exprimer au moyen de la seule relation $\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma}/E + g(\sigma, \varepsilon)$. En effet, pour décrire l'évolution d'un assemblage présentant des éléments en série, il est nécessaire d'introduire des *variables internes* $\alpha \in \mathbb{R}^n$ repérant l'état des différentes parties de l'assemblage. Bien entendu, il faut préciser l'évolution de ces variables internes, cette évolution étant fonction, elle aussi, de l'état actuel. On a donc :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon} = \dot{\sigma}/E + g(\sigma, \varepsilon, \alpha) \\ \dot{\alpha} = h(\sigma, \varepsilon, \alpha) \end{cases}$$

Pour fixer les idées, considérons le modèle de la figure 7.1, où α est la déformation dans le petit groupe en parallèle. La contrainte dans la branche du bas est $\sigma_b = \eta(\dot{\varepsilon} - \dot{\sigma}/E)$; dans celle du

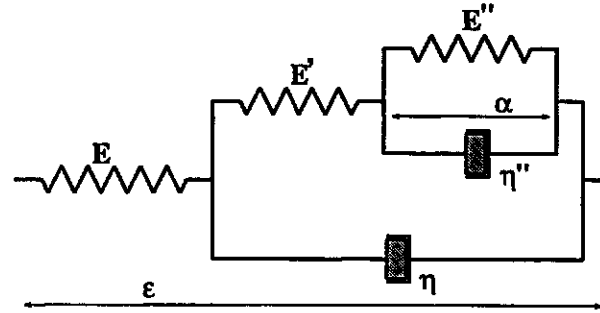


Figure 7.1 : Modèle viscoélastique linéaire

haut on a $\sigma_h = E'(\varepsilon - \sigma/E - \alpha) = E''\alpha + \eta''\dot{\alpha}$. Comme $\sigma = \sigma_b + \sigma_h$, la première expression de σ_h conduit rapidement à :

$$g(\sigma, \varepsilon, \alpha) = \frac{1}{\eta} \left(\sigma \left(1 + \frac{E'}{E} \right) - E'\varepsilon + E'\alpha \right)$$

et la seconde à :

$$h(\sigma, \varepsilon, \alpha) = \frac{1}{\eta''} \left(E'\varepsilon - \frac{E'}{E}\sigma - (E' + E'')\alpha \right).$$

Pour un assemblage de ce type la condition d'admissibilité thermodynamique revient simplement à la positivité des coefficients de viscosité.

On peut remarquer que le modèle de 7.2.1 qui prend en compte l'effet d'adoucissement thermique suit ce formalisme. En effet, en considérant T comme un paramètre dans (7.3), on peut écrire, grâce à (7.4) :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon} = \dot{\sigma}/E + g(\sigma, \varepsilon, T) \\ \dot{T} = \frac{1}{\rho C_p} \sigma g(\sigma, \varepsilon, T) = h(\sigma, \varepsilon, T) \end{cases}$$

Une autre façon d'aborder les relations de comportements consiste à se placer dans le cadre des Matériaux Standards (Halphen, Nguyen [53]). Sous ces hypothèses, le comportement de l'échantillon est déterminé par la donnée de son *énergie libre* $\psi(\varepsilon^e, \alpha)$ et d'un *potentiel de dissipation* $\varphi^*(\sigma, A)$ où α et A sont respectivement les paramètres internes et les forces thermodynamiques associées. L'inégalité de dissipation (second principe) est dans ce cadre automatiquement vérifiée, les potentiels étant supposés *convexes*. Par exemple, un comportement élasto-visco-plastique est décrit par les potentiels (α, A réels) :

$$\psi(\varepsilon^e, \alpha) = \frac{1}{2}E(\varepsilon^e)^2 + \frac{1}{2}E_t\alpha^2$$

$$\varphi^*(\sigma, A) = \frac{1}{(m+1)\eta} < |\sigma - A| - \sigma_y >^{m+1}$$

où $< x > = (x + |x|)/2$ représente la partie positive de x , E et E_t sont des modules d'élasticité, σ_y un seuil de contrainte, η une viscosité et $m > 1$ un réel. Dans ce cadre, ces potentiels conduisent aux équations de comportement (Halphen, Nguyen [53]) :

$$\sigma \equiv \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon^e} = E\varepsilon^e \quad A \equiv \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} = E_t\alpha \quad \dot{\varepsilon}^{an} \equiv \frac{\partial \varphi^*}{\partial \sigma} = -\frac{\partial \varphi^*}{\partial A} \equiv \dot{\alpha}$$

La dernière expression montre qu'il y a identité entre α et $\varepsilon^{an} = \varepsilon - \sigma/E$ (l'état initial étant l'état naturel) ce qui permet d'exprimer A avec la deuxième relation et par suite $g(\sigma, \varepsilon) = \dot{\varepsilon}^{an}$ grâce à la troisième égalité :

$$g(\sigma, \varepsilon) = \frac{1}{\eta} < \left(1 + \frac{E_t}{E}\right) \sigma - E_t \varepsilon - \sigma_y >^m \operatorname{sgn} \left[\left(1 + \frac{E_t}{E}\right) \sigma - E_t \varepsilon \right]$$

Ce modèle de comportement correspond au modèle de la figure 7.2 avec un élément visqueux non linéaire et un seuil σ_y . Une variante de ce modèle utilisant un seuil défini non pas en contrainte

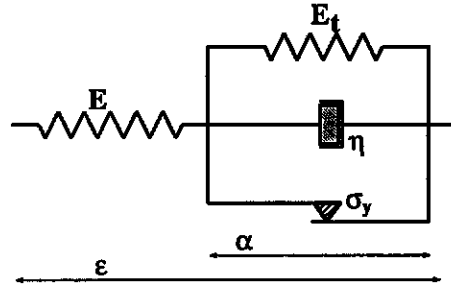


Figure 7.2 : Modèle élasto-visco-plastique

mais en déformation critique permet de modéliser le comportement dynamique du béton (Sluys, de Borst [88]).

7.3 Equations d'évolution

Le système d'équations aux dérivées partielles qui gouverne l'évolution de l'échantillon s'écrit d'après tout ce qui précède :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{dans }]0, L[\times]0, T[: \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \rho \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma}{\partial t} = g(\sigma, \varepsilon, \alpha) \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial t} = h(\sigma, \varepsilon, \alpha) \end{array} \right. \\ \\ \text{dans }]0, L[\times \{t, t \leq 0\} : \sigma = 0, \varepsilon = 0, v = 0, \alpha = 0 \\ \\ \text{sur } \{0, L\} \times]0, T[: \\ \left\{ \begin{array}{l} v = v^d \\ \text{et/ou} \\ \sigma = \sigma^d \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (7.5)$$

La contrainte σ étant scalaire, la condition de bord en effort est donnée sous la forme $\sigma = \sigma^d$ avec $S_E \sigma^d \cdot n = T^d$ (resultante normale des efforts sur la face). n représente la "normale sortante" à l'échantillon soit $n = -1$ en $x = 0$ et $n = +1$ en $x = L$.

Les équations sont regroupées en trois parties : les équations de champs, les conditions initiales (état naturel, quitte à changer l'origine temporelle) et les conditions aux limites qui sont données en $x = 0$ et/ou $x = L$, en effort et/ou en vitesse et à tout instant.

Ce système d'équations aux dérivées partielles est de type *hyperbolique* ; la propagation des ondes est gouvernée par les deux premières équations, c'est à dire par l'opérateur d'évolution qui relie les dérivées partielles temporelle et spatiale de la contrainte et de la vitesse. La discussion faite au paragraphe 2.2.3, permet de supposer les conditions aux limites suffisamment régulières (continues en fait) de façon à ne pas avoir de discontinuités à traiter. Les relations de saut sont par conséquent laissées volontairement de côté. Les deux équations suivantes sont relatives à ε et α , vus dans ce système comme des paramètres dont l'évolution temporelle dépend uniquement de l'état actuel. Dans la suite, on notera indifféremment $g(\sigma, \varepsilon, \alpha)$ ou $g(\sigma, \varepsilon, \alpha; \{p_i\})$ selon que l'on s'intéresse explicitement ou non à la dépendance de g par rapport au jeu de paramètres $\{p_i\}$ qui entrent dans l'écriture de la fonction g .

7.4 Résolution numérique du problème direct d'évolution

7.4.1 Méthode des caractéristiques

Le problème d'évolution présente la forme générale de système hyperbolique suivante (Eringen, Şuhubi [36]) :

$$\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \mathbf{C} \quad (7.6)$$

dans lequel \mathbf{A} et \mathbf{B} sont des matrices de dimension 2, \mathbf{C} est un vecteur et \mathbf{U} le vecteur inconnu du problème :

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \sigma \\ v \end{bmatrix}$$

Toutes ces grandeurs sont a priori fonction de x et t . Considérons dans le plan $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ une courbe Γ paramétrée par t :

$$\begin{aligned} \Gamma : \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longrightarrow (x(t), t) \end{aligned}$$

On cherche à résoudre le problème de Cauchy sur $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ défini par l'équation (7.6) avec la condition :

$$U(x, t) = U_0(t) \quad \text{le long de } \Gamma$$

où U_0 est une fonction suffisamment régulière du temps.

DÉFINITION : une *courbe caractéristique* du système (7.6) est une courbe Γ pour laquelle le problème de Cauchy ci-dessus est indéterminé. En d'autres termes, sur la courbe Γ , il est impossible de déterminer le gradient (par rapport à x et t) de U et en conséquence d'intégrer le champ U à partir de Γ . \diamond

Sur Γ , le système vérifié par le gradient de U est :

$$\begin{cases} \text{équation d'évolution :} & \mathbf{A} \frac{\partial U}{\partial x} + \mathbf{B} \frac{\partial U}{\partial t} = C \\ U(x, t) = U_0(t) \text{ pour tout } t : & x'(t) \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{dU_0}{dt} \end{cases} \quad (7.7)$$

qui s'écrit aussi matriciellement ($\mathbf{1}$: matrice identité (2×2)) :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ x'(t) \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ \frac{dU_0}{dt} \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

dont on écrit les deux conditions d'indétermination :

1. le déterminant du système doit être nul :

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ x'(t) \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} = 0$$

ce qui s'écrit en retranchant la deuxième colonne de la première :

$$\det (\mathbf{A} - x'(t) \mathbf{B}) = 0 \quad (7.9)$$

Cette équation du second degré en $x'(t)$ donne, si ses solutions sont réelles, les pentes x'_+ et x'_- des courbes caractéristiques Γ_+ et Γ_- , issues du point $(x(t), t) \in \mathbb{R}^2$.

2. le second membre doit être compatible :

$$\begin{bmatrix} C \\ \frac{dU_0}{dt} \end{bmatrix} \in \text{Im} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ x'_\pm \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

ce qui traduit, pour chaque valeur x'_+ ou x'_- , l'appartenance du vecteur formant le second membre à un hyperplan de \mathbb{R}^4 soit une relation *linéaire* que doivent vérifier, le long de Γ_+ ou Γ_- , les composantes de $\frac{dU_0}{dt}$, à savoir les incréments de contrainte $d\sigma_0$ et de vitesse dv_0 : c'est la *relation caractéristique*.

Dans le cas où ces relations, sur Γ_+ et Γ_- , admettent des intégrales premières et peuvent donc s'écrire $dJ_+ = 0$ et $dJ_- = 0$, les grandeurs J_+ et J_- se conservent le long des caractéristiques et sont appelés *invariants de Riemann*.

Les courbes caractéristiques ont une signification physique forte. En effet, dans le cas où les invariants de Riemann existent, on interprète la conservation de l'invariant comme un transport de la quantité $J = J_0$ le long de la courbe caractéristique issue de $M_0(x_0, t_0)$ (J_0 étant la valeur de J au point donné M_0). C'est pourquoi, si l'on se donne, en deux points A et B (distincts et n'appartenant pas à une même caractéristique), la valeur des invariants de Riemann et que des courbes caractéristiques issues respectivement de A et B et se coupent en M , on peut déterminer en M la valeur du champ U . C'est ainsi que la construction d'un *réseau de caractéristiques* permet de résoudre le problème d'évolution (7.6) par la détermination, sur les nœuds de ce réseau la valeur du champ U . On peut remarquer que si les invariants de Riemann existent, cette intégration est exacte et que dans le cas contraire, la précision dépend naturellement de la finesse du réseau de caractéristiques.

7.4.2 Application de la méthode des caractéristiques

Le système (7.5) est bien résolu par la méthode des caractéristiques : le comportement est de type Sokolowski-Malvern donc le réseau de caractéristiques est constitué de droites de pentes connues a priori et le passage du régime élastique au régime visco-plastique n'affecte pas ce réseau.

Les équations de propagation prennent la forme générale :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \rho \frac{\partial v}{\partial t} = f_1 \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma}{\partial t} = f_2 \end{cases} \quad (7.10)$$

où f_1 et f_2 sont des fonctions de x , t , σ , v , ϵ et α . La résolution de l'équation (7.9) donne les valeurs :

$$x'_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{\rho}{E}}$$

Ces valeurs étant constantes, le réseau de caractéristiques est entièrement connu : c'est l'ensemble des droites du plan (x, t) de pente $\pm 1/c$ ($c = \sqrt{E/\rho}$). Physiquement ces droites correspondent aux fronts de propagation des ondes dans le milieu : la pente $+1/c$ pour les ondes se propageant vers les $x \geq 0$ et la pente $-1/c$ pour celles allant vers les $x \leq 0$. La condition de compatibilité du second membre s'écrit :

$$\frac{dv_0}{dt} = \pm \frac{c}{E} \frac{d\sigma_0}{dt} \pm cf_2 - \frac{c^2}{E} f_1$$

c'est à dire en terme d'incréments :

$$dv = \pm \frac{c}{E} d\sigma \pm cf_2 dt - \frac{1}{\rho} f_1 dt \quad (7.11)$$

relation que doit vérifier la solution de (7.10) le long de toute droite caractéristique de pente $\pm c$. A partir de la figure (7.3), en supposant connus les champs de vitesse et de contrainte en A et

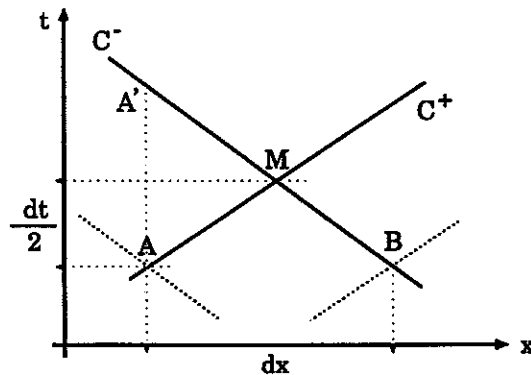


Figure 7.3 : Intégration sur les caractéristiques

B, la relation (7.11) écrite respectivement entre ces points et le point M, sur les caractéristiques $\{+\}$ et $\{-\}$, conduit à un système linéaire de deux équations aux deux inconnues v_M et σ_M

dont la résolution conduit à :

$$\begin{cases} v_M = \frac{1}{2}(v_B + v_A) + \frac{c}{2E}(\sigma_B - \sigma_A) - \frac{c}{4} \frac{dt}{\rho} (f_2^B - f_2^A) - \frac{dt}{4\rho} (f_1^B + f_1^A) \\ \sigma_M = \frac{1}{2}(\sigma_B + \sigma_A) + \frac{E}{2c}(v_B - v_A) - \frac{E}{4} \frac{dt}{\rho} (f_2^B + f_2^A) - \frac{c}{4} \frac{dt}{\rho} (f_1^B - f_1^A) \end{cases} \quad (7.12)$$

relations auxquelles il faut ajouter les relations incrémentales (en temps) qui actualisent ε et α qui sont écrites de façon explicite, par exemple :

$$\begin{cases} \varepsilon_M = \frac{1}{2}(\varepsilon_A + \varepsilon_B) + \frac{1}{2c}(v_B - v_A) \\ \alpha_M = \frac{1}{2}(\alpha_A + \alpha_B) + \frac{dt}{4}[h(\sigma_A, \varepsilon_A, \alpha_A) + h(\sigma_B, \varepsilon_B, \alpha_B)] \end{cases}$$

7.4.3 Résolution par différences finies

Cette approche consiste à discrétiser le domaine $(x, t) \in]0, L[\times]0, T[$ de \mathbb{R}^2 par la grille constituée des points $\{(i \Delta x, n \Delta t), i = 0, 1..I, n = 0, 1..N\}$ sur laquelle seront discrétisés les champs mécaniques. Les opérateurs différentiels $\partial/\partial x$ et $\partial/\partial t$ sont par exemple remplacés par une différence finie centrée :

$$\left. \frac{\partial G}{\partial a} \right|_{a=k \Delta a} = \frac{G_{k+1} - G_{k-1}}{2 \Delta a} \quad \text{avec} \quad G_j = G(j \Delta a)$$

qui approche la dérivée de la grandeur G , au second ordre en Δa . Le système différentiel :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \rho \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma}{\partial t} = g(\sigma, \varepsilon, \alpha) \end{cases}$$

est donc discrétisé de la façon suivante :

$$\begin{cases} \frac{\sigma_{i+1}^n - \sigma_{i-1}^n}{2 \Delta x} - \rho \frac{v_i^{n+1} - v_i^{n-1}}{2 \Delta t} = 0 \\ \frac{v_{i+1}^n - v_{i-1}^n}{2 \Delta x} - \frac{1}{E} \frac{\sigma_i^{n+1} - \sigma_i^{n-1}}{2 \Delta t} = g(\sigma_i^n, \varepsilon_i^n, \alpha_i^n) \end{cases}$$

dans lequel les indices inférieur et supérieur repèrent respectivement les positions en espace (i) et en temps (n). Pour montrer que ce schéma est stable (Dautray, Lions [30]), on applique une transformée de Fourier spatiale au système discrétisé, les valeurs aux nœuds étant supposées celles prises par des fonctions suffisamment régulières : $\sigma_i^n = \sigma(i \Delta x, n \Delta t)$ et $v_i^n = v(i \Delta x, n \Delta t)$. En utilisant le résultat suivant : soit $f(x)$ une fonction réelle, on note $f_i(x) = f(x + i \Delta x)$, alors :

$$\mathcal{F}_x \left[\frac{f_{i+1}(x) - f_{i-1}(x)}{2 \Delta x} \right] (\xi) = \frac{\beta}{2 \Delta t} \mathcal{F}_x [f_i(x)] (\xi) \quad \text{avec} \quad \beta = 2i \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(\xi \Delta x)$$

où $\mathcal{F}_x [f(x)] (\xi) = \hat{f}(\xi)$ est la transformée de Fourier spatiale de $f(x)$, dans l'espace (ξ, t) le système discrétisé devient :

$$\begin{bmatrix} \hat{\sigma}_i^{n+1} \\ \hat{v}_i^{n+1} \\ \hat{\sigma}_i^n \\ \hat{v}_i^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \beta E & 1 & 0 \\ \beta/\rho & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_i^n \\ \hat{v}_i^n \\ \hat{\sigma}_i^{n-1} \\ \hat{v}_i^{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2E\Delta t \hat{g}_i^n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

qui est stable si la matrice de passage donnant l'état à l'instant $(n + 1)$ en fonction de l'état à l'instant n a ses valeurs propres de module inférieur à 1, soit :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad |\sin(\xi \Delta x)| \leq \frac{\Delta x}{c \Delta t} \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{E/\rho}$$

Le schéma aux différences finies est donc stable si :

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{c} \quad (7.13)$$

c'est à dire si la discrétisation en temps est suffisante pour autoriser la "transmission" d'un signal à la célérité c des ondes dans le matériau considéré. Les équations d'actualisation en temps des champs ϵ et α sont écrites, de la même façon, sur la grille $(i \Delta x, n \Delta t)$.

7.4.4 Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis n'a pas été utilisée dans cette étude dont le cadre se restreint à une modélisation unidimensionnelle. On constate en effet que pour la classe de lois de comportement choisie, la méthode des caractéristiques s'avère de loin la plus performante (aussi bien en précision qu'en temps de calcul) en comparaison des méthodes aux différences finies et des éléments finis.

En revanche, si l'on se pose le problème d'identification du comportement dans le cadre des grandes transformations, on utilise une méthode d'éléments finis pour la simulation du problème direct. Ce cas se présente par exemple lorsque les données expérimentales proviennent d'essais aux barres de Hopkinson réalisés sur des mousses qui présentent généralement des déformations importantes. Les éléments finis sont bien entendu nécessaires lorsque l'on sort de la modélisation unidimensionnelle ou que l'on a à traiter des structures plus complexes. Ce cas se présente lorsque, dans l'exemple précédent d'une mousse, le gonflement de l'échantillon est tel, que les effets d'inertie radiale ne sont plus négligeables et qu'une modélisation correcte est obligatoirement bidimensionnelle (axisymétrique dans ce cas).

7.4.5 Problème aux limites et problème de Cauchy

Dans le système (7.5) des équations d'évolution, les conditions aux limites peuvent être imposées de différentes façons. La première est l'approche classique d'un problème de mécanique pour lequel on se donne soit la vitesse soit l'effort en tout point de la frontière du domaine occupé par la structure c'est à dire ici en $x = 0$ et $x = L$. Le problème d'évolution est alors bien posé et est résolu par l'une ou l'autre des méthodes.

L'autre approche est celle du problème de Cauchy qui est naturellement reliée à la méthode des caractéristiques : on se donne la vitesse et l'effort sur une ligne dans l'espace $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ qui n'est pas une ligne caractéristique. Le système différentiel peut alors s'intégrer, le long des caractéristiques, à partir de ces données initiales. Dans notre cas, on peut imposer σ et v sur l'une des faces de l'échantillon, les droites $\{x = 0, t \in \mathbb{R}\}$ et $\{x = L, t \in \mathbb{R}\}$ n'étant pas des lignes caractéristiques.

L'approche classique du problème aux limites est celle que l'on utilisera dans la suite, puisque l'essai aux barres de Hopkinson fournit a priori les efforts et les vitesses sur les deux faces de l'échantillon. Cependant, dans certaines situations pour lesquelles les données ne sont fiables que sur l'une des faces de l'échantillon, on peut être amené à utiliser une approche de type "problème de Cauchy". Ce cas se présente notamment pour un montage de type bloc-barre

dans lequel l'impacteur, de grande impédance et de masse importante, vient directement impacter l'échantillon et où seules la force et la vitesse sur la face sortante peuvent être mesurées (puisque une jauge de déformation collée sur la barre sortante permet un traitement analogue à celui appliqué au système de Hopkinson). Ce type de simulation permet par exemple, pour le montage bloc-barre (figure 1.9), de savoir à partir de quel instant l'hypothèse classiquement adoptée pour la vitesse de l'impacteur est justifiée. Cette hypothèse est que la décélération de l'impacteur est due à la réaction de l'échantillon, effort mesuré par la jauge dont est équipée la barre sortante. Cela revient à supposer l'impacteur *rigide* (Girardot, Rota [45]), c'est à dire de négliger la propagation des ondes dans celui-ci.

L'intégration du problème de Cauchy (voir section 5.2.4) se fait, dans le cas unidimensionnel, par des relations analogues à (7.12), en calculant vitesse et contrainte en M à partir de celles en A et A' (figure 7.3). On précise sous quelle condition cette intégration est possible. En particulier on étudie l'influence sur la stabilité du schéma d'un bruit (blanc) sur les données initiales (à l'abscisse $x = 0$, par exemple). En s'appuyant sur la figure 7.4, on voit que l'on peut regrouper ces relations sous forme matricielle :

$$X_{n+1} = M_n \cdot X_n + F_n(X_n) dt \quad (7.14)$$

dans laquelle X_n est le vecteur des états (σ, v) de tous les points de l'étape n (figure 7.4) (la taille de X_n est donc le *double* du nombre de points à l'étape n). Le nombre de points diminue d'une unité à chaque étape ; supposons que l'on soit parti de N points : à l'étape n il reste donc $N - n$ points. La matrice M_n est alors rectangulaire $2(N - n - 1) \times 2(N - n)$; elle contient

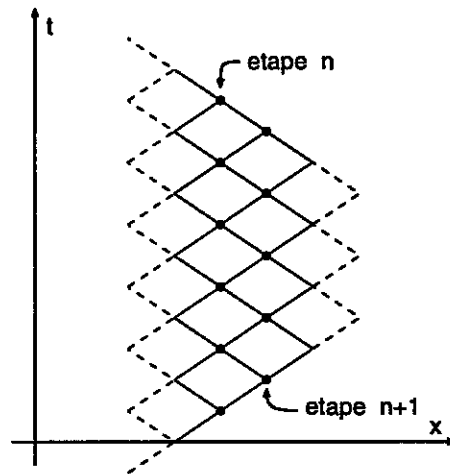


Figure 7.4 : Intégration de Cauchy par les caractéristiques

sur chaque ligne *quatre* termes non nuls égaux à $\pm \frac{1}{2}$ (voir (7.12)). F_n est construite à partir des seconds membres f_1 et f_2 (a priori non linéaires) du système (7.10). f_1 et f_2 sont des fonctions lipschitziennes de σ et v ce qui permet d'écrire $\|F_j(X_j)\| \leq \ell \|X_j\|$ (en supposant $F_j(0) = 0$, ce qui ne modifie pas le raisonnement, et ℓ est indépendant de j puisqu'il ne dépend que de f_1 et f_2).

Dans la relation (7.14), le terme $F_n(X_n)dt$ peut être considéré comme une *correction*, d'autant plus faible que le pas de temps dt est petit, si bien que X_{n+1} peut s'écrire $X_{n+1} \simeq \tilde{M}_n \cdot X_n$. La matrice \tilde{M}_n s'obtient à partir de M_n à laquelle on a ajouté aux termes non nuls $\pm \frac{1}{2}$ une correction que l'on peut majorer par $K \ell dt$ (K constante).

Pour étudier la stabilité, on suppose que X_n est un vecteur aléatoire. L'espérance des composantes est donnée et leur écart type est supposé identique (σ_n). La variance de la $j^{\text{ème}}$

composante de X_{n+1} est donnée par :

$$\text{Var}(X_{n+1}^j) = (\tilde{M}_n^{j,k})^2 \text{Var}(X_n^k) = \sigma_n^2 \sum_k (\tilde{M}_n^{j,k})^2$$

D'après la forme de la matrice \tilde{M}_n , la somme porte sur quatre termes dont la valeur absolue est majorée par $\frac{1}{2} + K \ell dt$. Les écarts types des composantes de X_{n+1} (ils sont tous du même ordre, noté σ_{n+1}) vérifient donc :

$$\sigma_{n+1} \simeq (1 + 2 K \ell dt) \sigma_n$$

Une "profondeur" L de propagation nécessite un nombre L/dx d'itérations, où $dx = C dt$ est la discrétisation spatiale (C , célérité des ondes). L'écart type final σ_{final} est alors majoré :

$$\sigma_{\text{final}} \leq (1 + 2 K \ell dt)^{L/dx} \sigma_{\text{initial}} \simeq \sigma_{\text{initial}} \exp(K \ell T^{\text{trsf}})$$

où T^{trsf} est le temps de transfert des ondes (temps d'aller retour) pour la profondeur L considérée. L'étalement du signal croît avec le temps de transfert et la rapidité de cette croissance est reliée à ℓ (qui indique la variation "maximale" du second membre de (7.10)). Dans le cas du modèle de la figure 7.2, la valeur de ℓ peut être estimée par le rapport E/η qui borne les variations de la fonction $g(\sigma, \varepsilon)$ associée à ce modèle. La valeur de T^{trsf} est typiquement de quelques microsecondes dans les cas pratiques, ce qui rend généralement la simulation possible.

Dans le cas purement linéaire, il suffit de remplacer formellement ℓ par 0 : l'écart type se conserve dans la transformation $X_n \rightarrow X_{n+1}$. Cette conservation de la qualité de l'information, dont on a naturellement tendance à penser qu'elle se dégrade au cours de l'intégration, est due au fait que cette dégradation est contrebalancée par la réduction du nombre de points pris en compte.

7.4.6 Comparaison des méthodes

Comme on l'a déjà précisé, la méthode des caractéristiques présente un intérêt si la pente des caractéristiques est connue a priori, ce qui a pour conséquence de fixer le réseau et de permettre une simulation rapide.

D'autre part, on peut noter que la méthode des caractéristiques est une intégration *analytique* des équations d'évolution, c'est pourquoi, elle ne présente pas, contrairement aux différences finies, de dérive temporelle et permet une intégration sur des temps plus importants. La figure 7.5 (de gauche) présente la force entrante obtenue en imposant les vitesses sur les faces d'un échantillon dont le comportement est représenté par un modèle Zener par la méthode des caractéristiques (courbe régulière) et par un schéma aux différences finies centrées (courbe perturbée au delà de 200 μs) (N.B. : les courbes ont été décalées pour plus de clarté ; l'unité de force a été normalisée). Le graphique de droite montre la sensibilité du schéma aux différences finies lorsqu'on le sollicite "à fréquence élevée". En effet, la vitesse imposée est quasiment un échelon, dont le spectre contient des fréquences élevées ; celles-ci sont amplifiées lors de la propagation de l'onde : à chaque aller-retour de l'onde la réponse en force (sur la même face) se trouve de plus en plus bruitée (les grandeurs ont été normalisées pour apparaître sur ce graphique).

Dans le même ordre d'idées, on réalise une simulation avec des conditions aux limites CL ; puis à partir des conditions aux limites duales CL^* obtenues par ce calcul (si CL représente un effort, CL^* représente une vitesse et vice versa), on refait une simulation pour comparer les conditions aux limites "biduales" CL^{**} aux conditions CL initialement imposées : la propriété

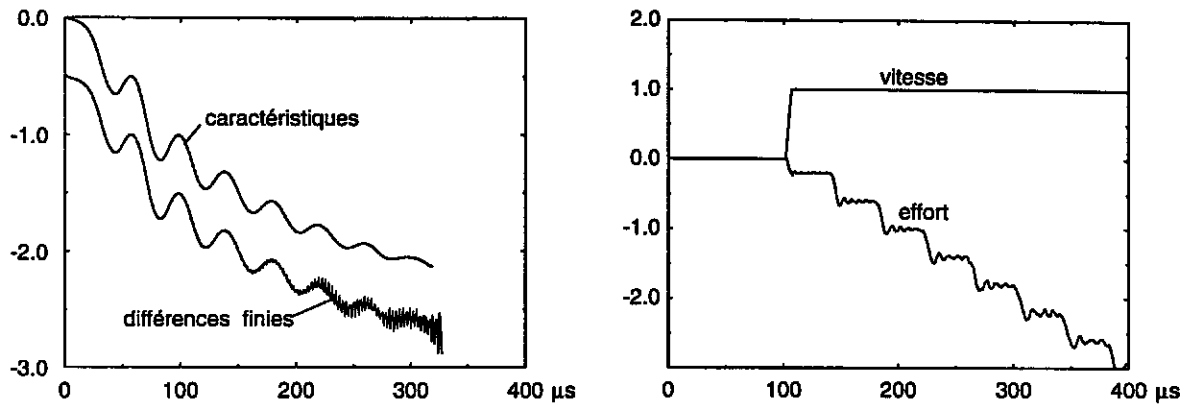


Figure 7.5 : Comparaison des deux méthodes

d'équivalence des conditions aux limites en effort et en vitesse permet d'affirmer que $CL = CL^*$; une méthode de calcul se doit donc d'être suffisamment *stable* pour reproduire ce fait. La méthode des caractéristiques est alors bien plus performante que la méthode des différences finies ; dans l'exemple choisi, on simule des efforts à partir de vitesses et on essaie de retrouver ces vitesses à partir des efforts que l'on vient d'obtenir par le calcul. La figure 7.6 représente la vitesse entrante (CL) imposée (régulière). La vitesse calculée (CL^{**}) ne s'en distingue *pas* lorsqu'elle est issue du calcul par la méthode des caractéristiques mais est très bruitée avec le calcul provenant du schéma aux différences finies. Cet aspect prendra toute son importance dans le choix de la méthode de simulation directe, puisque la résolution du problème inverse d'identification nécessite d'enchaîner deux simulations de ce type.

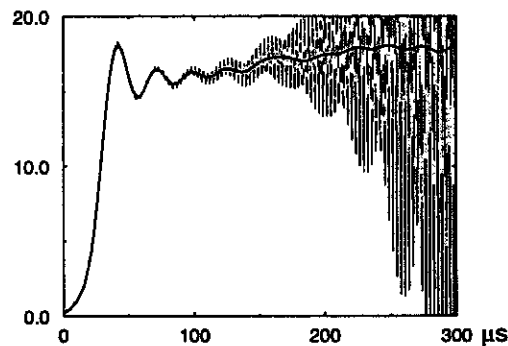


Figure 7.6 : Conditions "primales" et "biduales"

En revanche, un schéma aux différences finies n'est pas limité aux lois de type Sokolowski-Malvern : le module élastique n'est pas forcément constant et peut par exemple dépendre de l'état de charge, pourvu que la condition de stabilité donnée plus haut soit remplie ; ceci permet l'utilisation d'autres formes de relations de comportement.

La méthode des caractéristiques présente un phénomène de divergence numérique analogue à celui qui existe pour les différences finies lorsque la condition de stabilité (7.13) n'est pas satisfaite : il existe un seuil fréquentiel au delà duquel les fréquences ne peuvent plus être prises en compte par le modèle numérique.

Pour les différences finies ceci se traduit, pour une discrétisation spatio-temporelle donnée,

par une célérité maximale admissible par le schéma.

Dans le cas des caractéristiques, considérons le modèle de la figure 7.2 auquel on a retiré le patin (ce qui a pour effet de translater l'origine des contraintes) et où l'amortissement est supposé linéaire ($m = 1$). Il est représenté figure 7.7. Ce modèle rhéologique présente un comportement

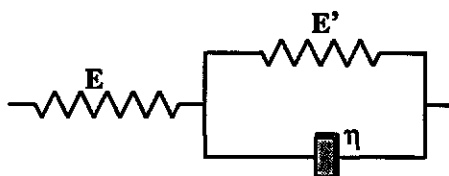


Figure 7.7 : Modèle simplifié

visco-élastique linéaire et peut donc être traité dans le domaine fréquentiel, en vue de déterminer le domaine de validité de la méthode numérique des caractéristiques. L'impédance complexe de cet ensemble est définie par :

$$\sigma = Y^* \varepsilon, \quad \frac{1}{Y^*} = \frac{1}{E} + \frac{1}{E' + i\omega\eta}$$

ce qui permet de définir le gain, en posant $X = (\frac{\omega\eta}{E})^2$ et $\lambda = \frac{E'}{E}$:

$$G(\omega) = 20 \text{Log}_{10} \left| \frac{E}{Y^*} \right| = 10 \text{Log}_{10} \left[\frac{X + (1 + \lambda)^2}{X + \lambda^2} \right]$$

et d'obtenir la courbe $G = G(\text{Log}_{10}(X))$ qui correspond à la courbe de gain d'un filtre passe bas (figure 7.8). Cette courbe présente une fréquence de coupure que l'on peut estimer au point X_c ,

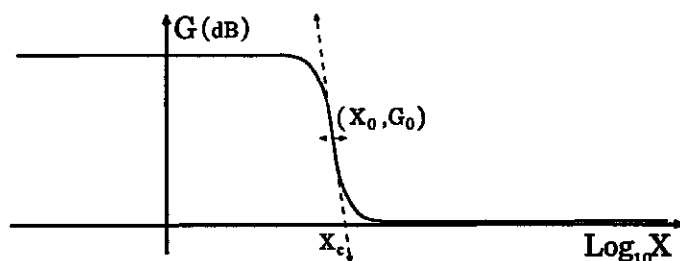


Figure 7.8 : Courbe de gain

point défini comme l'intersection avec l'axe des $\text{Log}_{10}(X)$ de la tangente à la courbe au point d'inflexion $(\text{Log}_{10}(X_0), G_0)$. On a alors :

$$X_0 = \lambda(1 + \lambda), \quad G_0 = 10 \text{Log}_{10} \left(1 + \frac{1}{\lambda} \right), \quad X_c = \lambda^2 \left(1 + \frac{1}{\lambda} \right)^{2(1+\lambda)}$$

d'où l'expression de la fréquence de coupure :

$$\omega_c = \frac{E}{\eta} (1 + \lambda) \left(1 + \frac{1}{\lambda} \right)^\lambda \quad (7.15)$$

Si l'on se place dans un cadre mécanique, on a généralement une valeur plus faible pour le module élastique E' que pour le module E , soit $\lambda \leq 1$, qui permet de majorer $(1 + 1/\lambda)^\lambda$ par 2 et donc

ω_c par $\omega_c^{max} = 2(E + E')/\eta$. Concrètement, cette fréquence de coupure ω_c signifie qu'au niveau de la simulation, seules les pulsations $\omega \leq \omega_c$ seront prises en compte. Les conditions aux limites que l'on impose dans les simulations sont échantillonnées sur une base de temps Δt ; d'après le théorème de l'échantillonnage de Nyquist, cette base de temps représente les pulsations $\omega \leq \frac{\pi}{\Delta t}$. Pour éviter le phénomène de confusion des fréquences, il est donc nécessaire d'échantillonner les données d'entrée (conditions aux limites) sur une base de temps suffisamment fine pour décrire entièrement la bande de fréquence $[0, \omega_c]$, soit :

$$\frac{\pi}{\Delta t} \geq \omega_c^{max} \geq \omega_c$$

(puisque dans le cas contraire, la bande $[\pi/\Delta t, \omega_c]$, normalement "vide", fera apparaître, de façon parasite, les harmoniques des pulsations $\omega < \omega_c$). Ceci permet de définir un pas de temps critique, correspondant à l'échantillonnage le moins fin admissible :

$$\Delta t \leq \Delta t_c = \frac{\pi \eta}{2(E + E')} \quad (7.16)$$

Si cette relation n'est pas satisfaite, la solution calculée par la méthode des caractéristiques est bruitée. La figure 7.9 montre cette divergence numérique lorsque, pour un pas de temps fixé, η décroît et se rapproche de la valeur critique $\eta_c = 2(E + E')\Delta t/\pi$, obtenue à partir de la relation (7.16). Les trois courbes représentent la force sur la face entrante de l'échantillon, obtenue avec un couple donné de vitesses, imposées sur les faces de l'échantillon pour différentes valeurs de η . (Les courbes ne sont pas identiques puisque le comportement change avec η , les unités de forces sont normalisées et la valeur relative de η par rapport à η_c est indiquée). On note que la valeur de η_c (respectivement Δt_c) n'est pas une frontière stricte pour la divergence numérique du calcul mais elle définit une zone de transition (pour $\eta/\eta_c \leq 1$ l'amplitude du bruit est supérieure à celle de la solution).

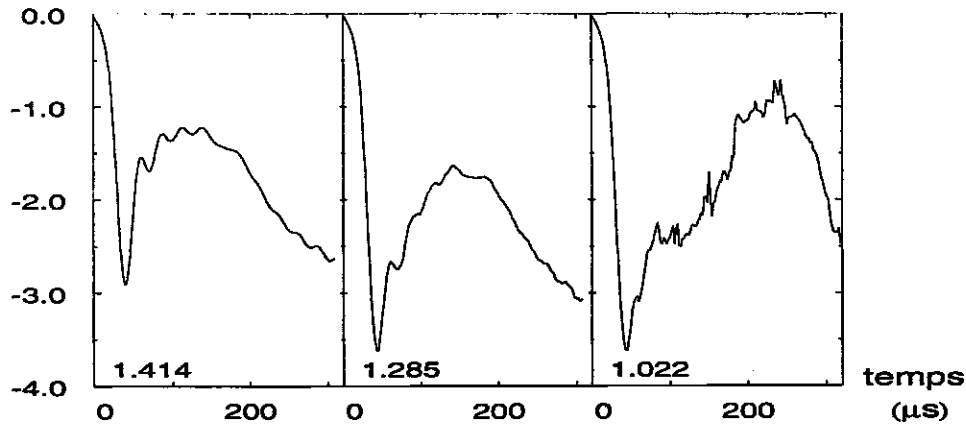


Figure 7.9 : Instabilité de l'intégration lorsque η décroît

Cette analyse rejoint celle du problème de Cauchy, de schéma très semblable (Suliciu [90]) (la différence se trouvant dans les limites du domaine d'intégration). En effet, l'écart type du vecteur X_n croît, pour le modèle considéré ici, exponentiellement en $E T^{trst}/\eta$ dans l'intégration du problème de Cauchy. Ceci implique, pour η pas trop petit, que l'intégration du problème de Cauchy dans la profondeur relative à T^{trst} n'est pas trop bruitée. Cette analogie indique que la divergence obtenue figure 7.9 est exponentielle lorsque $\eta \rightarrow \eta_c$.

7.9	Instabilité de l'intégration lorsque η décroît	105
8.1	Modèle élasto-visco-plastique	117
8.2	Impossibilité d'utiliser les différences finies	124
8.3	Sélection par tirage à la roulette	127
9.1	Vitesses imposées	130
9.2	Efforts simulés	130
9.3	Evolution de η et E_t	131
9.4	Evolution de E et σ_y	131
9.5	Evolution de \mathcal{J} et $\log(\mathcal{J})$	132
9.6	Etat adjoint, fonctionnelle quadratique	132
9.7	Sel gemme, effort entrant, identification sur 80 μs	135
9.8	Sel gemme, effort entrant, identification sur 120 μs	135
9.9	Sel gemme, effort entrant, identification sur 200 μs	135
9.10	Sel gemme, effort sortant, identification sur 80 μs	135
9.11	Sel gemme, effort sortant, identification sur 120 μs	135
9.12	Sel gemme, effort sortant, identification sur 200 μs	135
9.13	Evolution de \mathcal{J}/T^{ident}	136
9.14	Vitesses compatibles	137
9.15	Efforts compatibles	137
9.16	Vitesses dans l'échantillon, identification sel gemme	138
9.17	Efforts dans l'échantillon, identification sel gemme	138
9.18	Vitesses sur les faces de l'échantillon	139
9.19	Efforts sur les faces de l'échantillon	140
9.20	Histoire des efforts	141
9.21	Vitesses initiales et histoire des vitesses	141
9.22	Vitesses et efforts, essai acier	142
9.23	Comparaison avec l'analyse classique, essai XES	143
9.24	Efforts simulés B , A , B' et moyenne C , face entrante	144
9.25	Différents écarts	145
9.26	Population initiale et finale	146
9.27	Simulation élastique non linéaire	147

Liste des figures

1.1	Système de barres de Hopkinson	11
1.2	Signaux de jauge aux barres de Hopkinson	12
1.3	Montage de traction dynamique	12
1.4	Montage de torsion dynamique	13
1.5	Montage de cisaillement dynamique	13
1.6	Cellule de confinement	13
1.7	Essai de rupture dynamique	14
1.8	Eprouvette compacte de compression	14
1.9	Montage bloc-barre	14
1.10	Prise de vue - caméra rapide	15
2.1	Barres semi-infinies	21
2.2	Polaires pour le système de Hopkinson	21
2.3	Forces entrante et sortante	23
2.4	Test d'un élément de caisse automobile	27
3.1	Données sur l'échantillon	31
3.2	Analyse tridimensionnelle de l'échantillon	32
3.3	Chargement homogène de l'échantillon	33
3.4	Non équilibre des forces	34
4.1	Problème type	37
4.2	Problèmes direct et inverse	38
5.1	Problème direct	48
5.2	Consolidation dynamique	52
5.3	Problème de Cauchy	53
5.4	Problème type idéalisé	56
6.1	Situation du problème type idéalisé	61
6.2	Construction de conditions compatibles	66
6.3	Fuseau contenant \tilde{t}_{n+1}	68
6.4	La suite $\{t_n\}$	68
6.5	Construction "géométrique" de la suite, décroissance de M_n	69
6.6	Cas linéaire, pondérations (0.2, 0.8)	69
6.7	Position de t_∞	70
6.8	Construction pour la majoration	71
6.9	Projection sur les données expérimentales	83
6.10	Situations de prise en compte du bruit	87
7.1	Modèle viscoélastique linéaire	94
7.2	Modèle élasto-visco-plastique	95
7.3	Intégration sur les caractéristiques	98
7.4	Intégration de Cauchy par les caractéristiques	101
7.5	Comparaison des deux méthodes	103
7.6	Conditions "primales" et "biduales"	103
7.7	Modèle simplifié	104
7.8	Courbe de gain	104

- [91] TIKHONOV A., ARSENINE V. – *Methodes de résolution de problèmes mal posés*, Ed. Mir, Moscou, 1976.
- [92] TUGCU P., NEALE K.W. – A numerical simulation of impact response of typical metals including strain-rate change tests, *Int. J. Impact Engng.*, **15** (1), pp. 41-66, 1994.
- [93] WALLEY S.M., FIELD J.E., PALMER S.J.P. – Impact sensitivity propellants, *Proc. R. Soc. Lond. A*, **438**, pp. 571-583, 1992.
- [94] ZHANG Q., LALLEMENT G., FILLOD R., MIRANDA J. – A complete procedure for adjustment of a mathematical model from the identified complex modes, *Proc. IMAC, London*, pp. 1183-, 1987.
- [95] ZHAO H. – *Analyse de l'essai aux barres de Hopkinson; application à la mesure du comportement dynamique des matériaux*, Thèse de Doctorat de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 1992.
- [96] ZHAO H., GARY G. – The testing and behaviour modelling of sheet metals at strain rates from 10^{-4} to 10^4 s^{-1} , *Materials Science and Engineering A*, *MSA207/1*, pp. 46-50, 1996.
- [97] ZHAO H., GARY G. – A three dimensional analytical solution of the longitudinal wave propagation in an infinite linear viscoelastic cylindrical bar. Application to experimental techniques, *J. Mech. Phys. Solids*, **43** (8), pp. 1335-1348, 1996.
- [98] ZHAO H., GARY G. – On the use of SHPB techniques to determine the dynamic behavior of materials in the range of small strains *Int. J. Solids Struct.*, **33** (23), pp. 3363-3375, 1996.
- [99] ZHAO H., GARY G. – A new method for the separation of waves. Application to the SHPB technique for an unlimited duration of measurement, *J. Mech. Phys. Solids*, à paraître.
- [100] ZHAO H., GARY G., ROTA L. – Utilisation de la barre de Hopkinson pour l'étude du comportement dynamique des matériaux fragiles, 11^{ème} Congrès Français de Mécanique, Lille, 1993.

- [73] MAIGRE H., RITTEL D. – Mixed-mode quantification for dynamic fracture initiation : application to the compact compression specimen, *Int. J. Solids Struct.*, **30** (23), pp. 3233-3244, 1993.
- [74] MALVERN L.E. – Propagation of longitudinal waves of plastic deformation, *J. Appl. Mech.*, **18**, pp. 203-208, 1951.
- [75] MANDEL J. – *Cours de mécanique des milieux continus, Tome 1 : Généralités, Mécanique des fluides, Tome 2 : Mécanique des solides*, Ed. Gauthier-Villars, Paris, 1966.
- [76] MANDEL J. – Principe de non dualité, *C. R. Ac.*, 1967.
- [77] MANNER R., MANDERICK B. – *Proceedings of the second conference on Parallel Problem Solving from Nature*, North Holland Publishers, 1992.
- [78] MURAKAMI A., HASEGAWA T. – Back analysis by Kalman filter finite elements and optimal location of observed points, *Proc. 6th Int. Conf. Num. Meth. Geomech.*, Innsbruck, pp. 2051-, 1988
- [79] NOWACKI W.K. – *Wave propagation in non-elastic solids*, Pergamon Press, 1978.
- [80] POCHHAMMER L. – Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiszylinder, *J. für die Reine und Angewandte Mathematic*, **81**, pp 324-336, 1876.
- [81] POWELL M.J.D. – On the convergence of the variable metric algorithm, *Journal Inst. Maths Applics*, **7**, pp. 21-36, 1971.
- [82] RITTEL D., MAIGRE H., BUI H.D. – A new method for dynamic fracture toughness testing, *Scripta Metallurgica et Materialia*, **26**, pp. 1593-1598, 1992.
- [83] ROTA L. – An inverse approach for identification of dynamic constitutive equations, *International Symposium on Inverse Problems*, Ed. A.A.Balkema, 1994.
- [84] ROTA L. – Identification de loi de comportement dynamique par calcul inverse, 2^{ème} Colloque National en Calcul des Structures, Ed. Hermes, 1995.
- [85] ROUX J. – *Résolution de grands systèmes non linéaires et méthodes d'optimisation sans contraintes par des méthodes quasi-Newton d'ordre un et deux* Analyse numérique, Collection Enseignement des Sciences, volume **38**, chapitre 6, pp. 237-313, Ed. Hermann, Paris, 1991.
- [86] SEBAG M., SCHOENAUER M. – Contrôle d'un algorithme génétique, *Revue d'Intelligence Artificielle*, pp. -, Juin 1996.
- [87] SEMBLAT J-F. – *Sols sous sollicitations dynamiques et transitoires : réponse dynamiques aux barres de Hopkinson, propagation d'ondes en milieu centrifugé*, Thèse de Doctorat de l'Ecole Polytechnique, Paris, 1994.
- [88] SLUYS L.J., DE BORST R. – Wave propagation and localization in a rate-dependent cracked medium. Model formulation and one-dimensional exemples, *Int. J. Solids Struct.*, **29** (23), pp. 2945-2958, 1992.
- [89] SOKOLOWSKY – *Prikl. Mat. Mekh.*, **12**, p. 261, 1948.
- [90] MIHĂILESCU-SULICIU M., SULICIU I. – On the method of characteristics in rate-type viscoelasticity with non-monotone equilibrium curve, *ZAMM Z. angew. Math. Mech.*, **72** 12, pp. 667-674, 1992.

- [53] HALPHEN B., NGUYEN Q.S. – Sur les matériaux standards généralisés, *J. Mécanique.*, 14 (1), pp. 39-63, 1975.
- [54] HARDING J., WOOD E.D., CAMPBELL J.D. – Tensile testing of materials at impact rates of strain, *J. Mech. Engng Sci.*, 2, pp. 88-96, 1960.
- [55] HOLLAND J. – *Adaptation in natural an artificial systems*, University of Michigan press, Ann Harbor, 1975.
- [56] HOPKINSON B. – A method of measuring the pressure in the deformation of high explosives by the impact of bullets, *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 213, pp. 437-452, 1914.
- [57] HOSHIYA M., SAITO E. – Structural identification by extended Kalman filter, *I. Eng. Mech.*, 110, pp. 1750-, 1984
- [58] HUMEN V., POTESIL A. – Pulse method used to identify material properties in linear viscoelastic media, *Int. J. Impact Engng.*, 13, pp. 85-98, 1993.
- [59] JAHSMAN W.E. – Reexamination of the Kolsky technique for measuring dynamic material behavior, *J. Appl. Mech.*, 38, pp. 77-82, 1971.
- [60] KLEPACZKO J.R., GARY G., BARBERIS P. – Behaviour of rock salt in uniaxial compression at medium and high strain rates, *Arch. Mech.*, 43 (4), pp. 499-517, Varsovie, 1991.
- [61] KLEPACZKO J.R., MALINOWSKI Z. – Dynamic frictional effects as measured from the split Hopkinson pressure bar, *Proceedings IUTAM Symposium*, 19??.
- [62] KOLSKY H. – An investigation of the mechanical properties of material at a very high rate of loading, *Proceedings of the Physical Society B*, 60, pp. 676-701, 1949.
- [63] KOLSKY H. – The propagation of stress pulses in viscoelastic solids, *Phil. Mag.*, 1 (8), pp. 693-710, 1956.
- [64] LADEVÈZE P. – *Comparaison de modèles des milieux continus*, Thèse de Doctorat d'état, Université Paris VI, 1975.
- [65] LADEVÈZE P. – *Mécanique non linéaire des structures*, Ed. Hermès, Paris, janvier 1996.
- [66] LADEVÈZE P. – *Erreur en relation de comportement en dynamique: théorie et application au recalage de modèles de structures*, Rapport Interne, 150, L.M.T., 1993.
- [67] LADEVÈZE P., REYNIER M. – A localization method of stiffness errors for adjustment of finite element models, 12th ASME Mech. Vibration and Noise Conf., Montréal, Sept. 1989.
- [68] LADEVÈZE P., MAIA M.N., PROSLIER L., REYNIER M. – Recalage de modèles dynamiques à partir de réponses en fréquence, *Colloque National en Calcul des Structures, Giens, France*, 1995.
- [69] LE TALLEC P. – *Numerical analysis of viscoelastic problems*, Ed. Masson, Paris, 1990.
- [70] LINDHOLM U.S. – Some experiments with the split Hopkinson pressure bar, *J. Mech. Phys. Solids*, 12, pp. 317-335, 1964.
- [71] LIONS J.L., MAGENES E. – *Non-homogenous boundary value problems and applications*, Springer Verlag, Berlin, 1972.
- [72] MAIGRE H. – *Contribution théorique à l'identification des grandeurs caractéristiques en mécaniques de la rupture dynamique*, Thèse de Doctorat de l'Ecole Polytechnique, 1990.

- [34] DUFFY J., CAMPBELL J.D., HAWLEY R.H. – On the use of a torsional split Hopkinson bar to study rate effects in 1100-0 aluminium, *J. Appl. Mech.* **38**, pp. 83-91, 1971.
- [35] DUVAUT G., LIONS J.-L. – *Inéquations en mécanique et en physique*, Dunod, Paris, 1972.
- [36] ERINGEN A.G., ŞUHUBI E.S. – *Elastodynamics, Volume 1 : Finite Motions*, Academic Press, New York and London, 1974.
- [37] ERINGEN A.G., ŞUHUBI E.S. – *Elastodynamics, Volume 2 : Linear Theory*, Academic Press, New York and London, 1975.
- [38] FLETCHER R. – *Practical methods of optimisation*, Wiley-Interscience Publication, 1980.
- [39] GARY G. – *Modélisation et étude expérimentale du flambement dynamique*, Thèse de Doctorat d'Etat, 1980.
- [40] GARY G., KLEPACZKO J.R., ZHAO H. – Correction de dispersion pour l'analyse des petites déformations aux barres de Hopkinson, *Journal de Physique IV, Colloque C3, suppl. au Journal de Physique III*, **1**, 1991.
- [41] GARY G., KLEPACZKO J.R., ZHAO H. – Corrections for wave dispersion and analysis of small strains with split Hopkinson bar, *Proceedings of International Symposium of Impact Engineering, Sendai, Japan, 1992*.
- [42] GARY G., KLEPACZKO J.R., ZHAO H. – Application of microcomputers for Wave Dispersion Corrections for Split Hopkinson Pressure Bar, *Proceedings of ACMIRME'93 International Symposium, Xian, China, 1993*.
- [43] GARY G., KLEPACZKO J., ZHAO H. – Correction de dispersion pour l'analyse des petites déformations aux barres de Hopkinson, *Conférence Internationale DYMAT, Strasbourg, France, 1991*.
- [44] GARY G., NOWACKI W.K. – Essai de cisaillement plan appliqué à des tôles minces *Journal de Physique IV, Colloque C8, supplément au Journal de Physique III, Vol. 4*, 1994.
- [45] GIRARDOT D., ROTA L. – Contribution to foundation of impact laws and percussion theory : analysis of the impact of two elastic bars, *note L.M.S.*, 1996.
- [46] GERMAIN P. – *Shock waves, jump relations and structure*, Advances in Applied Mechanics, Vol 12, Academic Press, Inc., New York and London, 1972.
- [47] GERMAIN P., LEE H.E. – On shock waves in elastic-plastic solids, *J. Mech. Phys. Solids*, **21**, pp. 359-382, 1973.
- [48] GERMAIN P., MULLER P. – *Introduction à la mécanique des milieux continus*, Ed. Masson, Paris, 1995.
- [49] GOLDBERG D.E. – *Genetic algorithms in search, optimisation and machine learning*, Addison Wesley, 1989.
- [50] GOLDBERG D.E., RICHARDSON J. – Genetic algorithms with sharing for multi-modal function optimization, *Proceedings of ICGA-87*, pp. 41-49, Lawrence Erlbaum Associates, 1987.
- [51] GORHAM D.A. – Measurements of stress-strain properties of strong metals at very high rates of strain, *Inst. Phys. Conf. Ser.* **47**, pp. 16-24, 1980.
- [52] GORHAM D.A., POPE P.H., FIELD J.E. – An improved method for compressive stress-strain measurements at very high strain rates, *Proc. R. Soc. Lond. A*, **438**, pp. 153-170, 1992.

- [14] BREZIS H. – *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, North-Holland/American Elsevier, 1973.
- [15] BROYDEN C.G. – Quasi-Newton methods and their application to function minimisation, *Mathematics of Computation*, **21**, pp. 368-381, 1967.
- [16] BROYDEN C.G. – The convergence of a class of double rank minimisation algorithms I, *Journal Inst. Maths Applies*, **6**, pp. 76-90, 1970.
- [17] BROYDEN C.G. – The convergence of a class of double rank minimisation algorithms II, *Journal Inst. Maths Applies*, **6**, pp. 222-231, 1970.
- [18] BROYDEN C.G., DENNIS JR J.E., MORÉ J.J. – On the local and superlinear convergence of quasi-Newton methods, *Journal Inst. Maths Applies*, **12**, pp. 223-245, 1973.
- [19] BRUN L. – *Introduction à la thermodynamique des matériaux*, Cours Ecole Polytechnique, 1991.
- [20] BUI H.D. – *Introduction aux problèmes inverses en mécanique des matériaux*, Ed. Eyrolles, Paris, 1993.
- [21] BUI H.D., MAIGRE H., RITTEL D. – A new approach to the experimental determination of the dynamic stress intensity factor, *Int. J. Solids Struct.*, **29** (23), pp. 2881-2895, 1992.
- [22] BUI H.D., TANAKA M., BONNET M., LUZZATO E., MAIGRE H., REYNIER M. – , *Inverse problems in engineering mechanics*, Proceedings of the Second International Symposium on Inverse Problems in Engineering Mechanics, Clamart, France, Ed. Balkema, Rotterdam, Nov. 1994.
- [23] CHIU S.S., NEUBERT V.H. – Difference method for wave analysis of the split Hopkinson pressure bar with a viscoelastic specimen, *J. Mech. Phys. Solids*, **15** (3), pp. -, 1967.
- [24] CHREE C. – The equations of an isotropic elastic solid in polar and cylindrical co-ords, their solutions and applications, *Cambridge Phil. Soc., Trans.* **14**, pp 250-369, 1889.
- [25] CONN A.F. – On the use of thin wafers to study dynamic properties of metals, *J. Mech. Phys. Solids*, **13**, pp. 311-327, 1965.
- [26] CONSTANTINESCU A. – *Sur l'identification des modules élastiques*, Thèse de Doctorat de l'Ecole Polytechnique, Paris, 1994.
- [27] COQUIN G.A. – Attenuation of guided waves in isotropic viscoelastic materials, *J. Ac. Soc. Am.*, **36** (6), pp. 1074-1080, 1964.
- [28] COURANT R., HILBERT D. – *Methods of Mathematical Physics*, Vol. II., Wiley (Interscience), New York, 1962.
- [29] CRISTESCU N. – *Dynamic plasticity*, North-Holland publishing company, Amsterdam, 1967.
- [30] DAUTRAY R., LIONS J.-L. – *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, Masson, Paris, 1985.
- [31] DAVIES R.M. – A critical study of the Hopkinson pressure bar, *Philosophical Transactions A*, **240**, pp. 375-457, 1948.
- [32] DAVIES E.D.H., HUNTER S.C. – The dynamic compression testing of solids by the method of the split Hopkinson pressure bar, *J. Mech. Phys. Solids*, **11**, pp. 155-179, 1963.
- [33] DRUCKER D.C. – On the postulate of stability of material in the mechanics of continua, *J. of Mechanics*, **3** (2), pp. 235-249, 1964.

Bibliographie

- [1] ACHENBACH J.D. – *Wave propagation in elastic solids*, North-Holland publishing company, 1978.
- [2] BELEGUNDU A.D., ARORA J.S. – A study of mathematical programming methods for structural optimisation, Part I : Theory, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **21**, pp. 1583-1599, 1985.
- [3] BELEGUNDU A.D., ARORA J.S. – A study of mathematical programming methods for structural optimisation, Part II : Numerical results, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **21**, pp. 1583-1599, 1985.
- [4] BELL J.F. – An experimental diffraction grating study of the quasi-static hypothesis of the split Hopkinson bar experiment, *J. Mech. Phys. Solids*, **23**, pp. 1-19, 1966.
- [5] BERTHOLF L.D., KARNES C.H. – Two-dimensional analysis of the split Hopkinson pressure bar system, *J. Mech. Phys. Solids*, **23**, pp. 1-20, 1975.
- [6] BILLET L. – *Localisation des défauts de masse et de raideur de l'aéro-réfrigérant de Pont-sur-Sambre*, rapport EDF/DER, HP-62, 1991.
- [7] BITTANTI S., MAIER G., NAPPI A. – Inverse problems in structural elasto-plasticity, a Kalman filter approach, *Plasticity today*, Ed. A. Sawczuk, G. Bianchi, Elsevier, pp. 311-, 1984.
- [8] BLANC R.H. – Transient wave propagation methods for determining the viscoelastic properties of solids, *J. Appl. Mech.*, **60**, pp. 763-768, 1993.
- [9] BONNET M. – *BIE and material differentiation applied to the formulation of obstacle inverse problems*, EABE, vol. 15, pp. 121-136, 1195.
- [10] BONNET M., PILVIN PH., RAYNAUD M., REYNIER M. – *Problèmes inverses en Mécanique des Solides*, Polycopié de cours, Institut pour la Promotion des Sciences de l'Ingénieur (Paris), Oct. 1995.
- [11] BONY J-M. – *Analyse*, Cours Ecole Polytechnique, 1991.
- [12] BOURGUIGNON J-P. – *Calcul variationnel*, Cours Ecole Polytechnique, 1990.
- [13] BREZIS H. – *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*, Ed. Masson, Paris, 1992.

Il faut cependant rappeler que la motivation initiale de cette étude est d'optimiser le dépouillement de l'essai aux barres de Hopkinson, lorsque les conditions classiques ne sont pas réunies, étape que l'on doit considérer comme préliminaire à la détermination du comportement du matériau constitutif de l'échantillon, qui nécessiterait une identification systématique sur un grand nombre d'essais.

Cette approche peut s'appliquer à un autre cas intéressant, proche de celui de barres de Hopkinson, qui est le montage bloc-barre. Dans ce cas, les données induisent naturellement un problème de type Cauchy, qui n'a pas été traité explicitement dans ce mémoire. Le système des barres de Hopkinson fournit en effet des informations plus complètes, raison pour laquelle il est plus couramment utilisé.

Conclusion

Dans un premier temps on a présenté et étudié les possibilités et les difficultés de l'expérimentation dynamique, relatives en particulier à l'essai aux barres de Hopkinson, pour la détermination du *comportement dynamique*. Cette analyse nous a amené à reconsidérer l'exploitation classique des données du test, ce qui a conduit à une nouvelle approche, de type *problème inverse*. Cette approche inverse, présentée de manière théorique dans un cadre plus général que celui des barres de Hopkinson, repose sur la prise en compte des effets transitoires dans l'échantillon, considéré alors comme une structure à part entière et non plus comme un *volume élémentaire* de matière (ce qui correspond à l'analyse *quasi-statique* habituelle).

Le problème inverse apporte ainsi une réponse à la question de l'identification d'un comportement à partir - principalement - de données duales sur la frontière de la structure (effort et vitesses). La résolution du problème inverse repose sur la notion d'*écart* entre évolutions. Cet écart mesure la différence entre deux évolutions d'une structure, en partant d'un même état initial. En fait, le cadre introduit pour la résolution du problème d'identification fournit, de manière plus générale, une solution à toute une classe de problèmes aux limites mal posés, par indétermination ou surdétermination des conditions aux limites. On propose dans ce cas un algorithme permettant de construire des conditions aux limites *compatibles* puis une solution qui possède, sans toutefois les vérifier exactement, les caractères *cinématiquement admissible et statiquement admissible*, par rapport aux données en vitesse et en effort.

Pour appliquer la méthode inverse au cas du test aux barres de Hopkinson, il a été nécessaire, après avoir fixé la modélisation de l'échantillon, de développer une méthode de résolution du problème direct d'évolution. Cette approche a permis de souligner certaines difficultés liées à l'essai aux barres de Hopkinson, comme le calage de l'origine relative des ondes et son corrolaire, la détermination du module d'élasticité de l'échantillon, ou le problème d'adaptation d'impédance entre les barres et l'échantillon dont dépend la qualité des mesures. Dans un premier temps on s'est limité à une classe de comportement qui permet une simulation rapide du problème direct, en vue de tester la méthode. Il est bien entendu intéressant, dans la pratique, d'enrichir cette classe de comportement en y ajoutant des paramètres internes et en autorisant, par exemple, une élasticité non linéaire. Dans le même ordre d'idées, on peut enrichir le modèle par une modélisation axisymétrique de l'échantillon.

Pour le problème du calage de l'origine relative des données expérimentales, on peut, en fixant une origine sur l'un des quatre signaux, introduire trois décalages relatifs, τ_1 , τ_2 , τ_3 , des trois autres signaux : on les considère alors comme des paramètres que l'on cherche à optimiser au même titre que ceux décrivant le comportement. On voit ici la puissance de la méthode de l'état adjoint puisqu'avec le même Lagrangien (équation (8.8)), il suffit de réécrire sa différentielle (8.9) :

$$\delta \mathcal{L} = \delta_{\sigma, \varepsilon, v, \sigma^*, \varepsilon^*, v^*} \mathcal{L} + \delta_{\sigma, \varepsilon, \hat{v}, \sigma^*, \varepsilon^*, \hat{v}^*} \mathcal{L} + \delta_{\{p_i\}} \mathcal{L} + \delta_{\tau_1, \tau_2, \tau_3} \mathcal{L} \quad (9.2)$$

pour constater que le gradient $\nabla_{\tau_1, \tau_2, \tau_3} \mathcal{J}$ du coût \mathcal{J} par rapport à τ_1 , τ_2 et τ_3 s'identifie à $\nabla_{\tau_1, \tau_2, \tau_3} \mathcal{L}$, qui, toujours d'après (8.8) s'exprime analytiquement à partir des termes de conditions aux limites et \mathcal{J} .

Une autre remarque concerne la motivation de départ qui est d'optimiser le dépouillement de l'essai SHPB ; on cherche en effet un modèle capable de décrire au mieux l'*essai*, ce qui n'implique *pas* que l'on détermine le comportement du matériau constitutif de l'échantillon. Cette détermination nécessiterait par exemple une identification systématique sur un grand nombre d'essais et pour une gamme suffisamment large de vitesses d'impacteur (et donc de niveaux de sollicitation). On peut, dans ce cas, construire une fonctionnelle coût qui exerce un contrôle *global* sur plusieurs essais en considérant, par exemple, la somme (pondérée) des coûts relatifs à chaque essai.

local ; le minimum est alors atteint plus rapidement qu'avec l'AG et avec précision.

9.6 Conclusion de la troisième partie

Cette partie s'est intéressée plus particulièrement au traitement de l'essai aux barres de Hopkinson. Comme pour tout problème inverse on s'est tout d'abord donné une *modélisation* du test : choix du comportement de l'échantillon et méthode de résolution donnant accès à l'évolution de celui-ci. Ensuite, on a explicité la méthode inverse et notamment la question du calcul du gradient de la mesure d'écart entre évolutions qui en constitue une étape importante.

Le calcul inverse est ensuite testé sur quelques cas type pour valider la méthode et en souligner les difficultés. On peut cependant préciser les choses en ce qui concerne l'application de la méthode. D'une part, on s'est limité à un type de comportement *simple* (élasto-visco-plastique à quatre paramètres) mais qui présente l'avantage de décrire une classe de comportements que l'on a supposée suffisamment large dans un premier temps, et de permettre un traitement rapide du problème direct. Un axe de développement consiste donc à implémenter le calcul direct pour d'autres modèles de comportement, notamment à paramètres internes et/ou présentant une élasticité non linéaire. La figure 9.27 présente un exemple de calcul de la propagation des ondes dans un échantillon élastique non linéaire, grâce à une méthode des caractéristiques *modifiée*, récemment développée. En ce qui concerne le dépouillement de l'essai SHPB, on peut

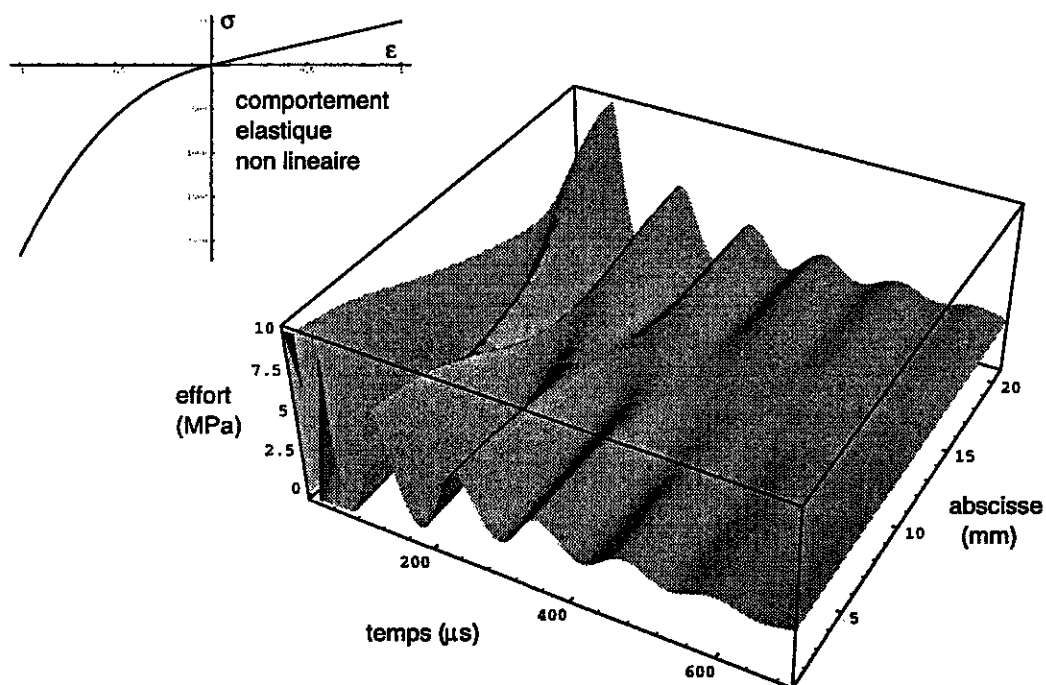


Figure 9.27 : Simulation élastique non linéaire

envisager dans l'avenir des calculs axisymétriques, mais cet aspect passe certainement après l'enrichissement des simulations 1D ; on peut à ce sujet rappeler que la détermination du gradient par état adjoint, si elle est la plus performante, nécessite pour de nouveaux comportements une reformulation (au moins partielle), puisque son développement se limite ici à un modèle de type Sokolowski-Malvern (section 7.2).

fonctionnelles non intégrées en temps mesurent un écart sur l'état de la structure *au temps* T ; comme le comportement est élastique, l'histoire du chargement n'est *pas* prise en compte par ces mesures, ce qui explique leur faible résolution.

L'application de l'algorithme génétique à une population d'une centaine d'individus tirés au hasard sur l'intervalle $[0, 1]$ (représentant le segment $[100\ 000\ \text{MPa}, 500\ 000\ \text{MPa}]$) que l'on reporte sur le tracé de l'écart sur ce même segment (figure 9.26, gauche). Après une vingtaine de générations, l'état de la population est celui de la figure 9.26, droite : les individus se sont regroupés dans les zones de minimum local. Le tableau 9.6 indique les abscisses ap-

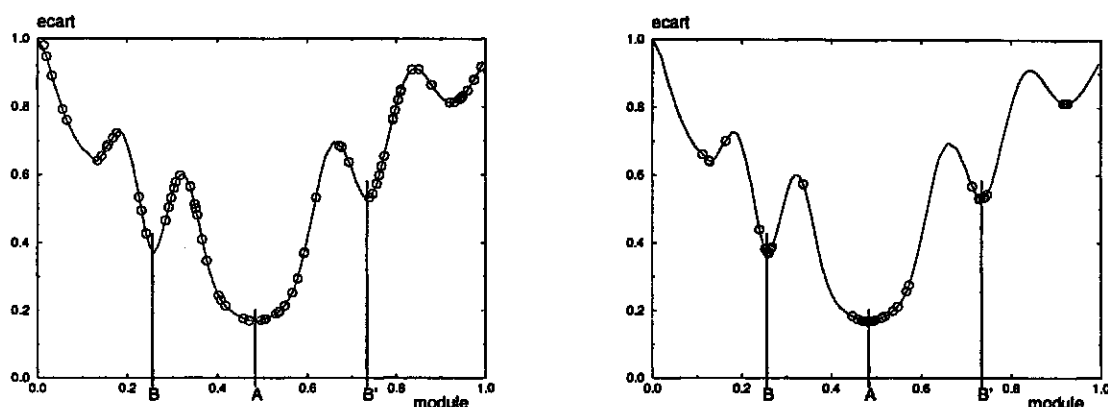


Figure 9.26 : Population initiale et finale

prochées de ces minima locaux, la valeur de l'écart en ces points et bien entendu le nombre d'individus qui se regroupent au voisinage des minima (leur somme ne fait pas 100 puisque certains individus restent isolés). Il est certain que dans le cas d'un seul paramètre l'algorithme

abscisse sur $[0, 1]$	0.12	0.26	0.49	0.74	0.92
écart normalisé	0.64	0.37	0.17	0.53	0.81
nbre d'individus	8	15	38	15	19

Tableau 9.6 : Minima locaux

n'a pas de grande difficulté pour détecter les minima locaux. Pour un nombre plus important de paramètres, cette opération est plus délicate puisqu'il faut couvrir, avec une population initiale de taille raisonnable, un pavé de \mathbb{R}^n et qu'un bon choix de paramètres de sélection, mutation et croisement devient important. Sur la figure 9.26, par exemple, on est pas allé jusqu'au bout de l'évolution (le critère d'arrêt étant généralement atteint lorsque la population n'évolue plus). Un nombre plus grand de générations conduirait à un regroupement plus piqué au voisinage des minima. Pour amener, par exemple, toute la population sur le minimum absolu on peut augmenter le facteur de mutation qui permet aux individus "bloqués" sur un minimum local de "sauter" hors de ce puits pour se retrouver dans la zone d'attraction du minimum global (Sebag, Schoenauer [86]).

Pour obtenir une bonne précision sur le(s) point(s) minimum(a), l'algorithme génétique nécessite de nombreuses itérations. On voit cependant l'intérêt du caractère *exploratoire* de la méthode puisqu'avec un petit nombre de générations, elle permet de détecter et sélectionner les zones de minimum, lorsque l'on a aucune idée a priori de la solution ; un algorithme de descente classique peut alors prendre le relais dans le voisinage du meilleur et/ou plus physique minimum

$E_{B'}$, est relativement “proche” de la réponse A , relative au module moyen $E_A = \frac{1}{2}(E_B + E_{B'})$. La courbe C contient en quelque sorte les caractères relatifs aux deux réponses dont on a pris la moyenne. On choisit donc comme données expérimentales les vitesses ayant servi aux simulations et les efforts définis par les courbes moyennes C .

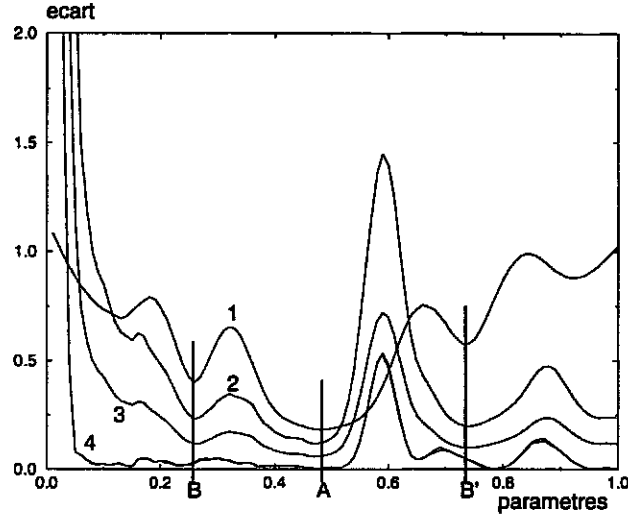


Figure 9.25 : Différents écarts

La figure 9.25 représente les variations de différentes fonctionnelles d'écart en fonction du module élastique (elles ont été normalisées pour la représentation). Les points B , A et B' correspondent aux modules E_B , E_A et $E_{B'}$. Les quatre courbes représentent :

1. l'écart quadratique sur les efforts, $\mathcal{J}_1 = \int_0^T \frac{1}{2} [\sigma - \sigma^d]_{x=0}^2 dt + \int_0^T \frac{1}{2} [\sigma - \sigma^d]_{x=L}^2 dt$,
2. l'écart énergétique, intégré en temps, ici $\mathcal{J}_2 = \int_0^T \int_0^L (\Delta \sigma \Delta \varepsilon + \rho \Delta v^2) dx dt$,
3. l'écart en puissance, intégré en temps, $\mathcal{J}_3 = \int_0^T (T - t) \Delta \sigma \Delta v|_{x=0}^{x=L} dt$,
4. deux courbes quasiment confondues représentant les fonctionnelles écart en puissance et écart énergétique au temps T , dont les expressions sont similaires à \mathcal{J}_2 et \mathcal{J}_3 respectivement, sans le facteur $(T - t)$ dans l'intégrande.

De manière générale, on sait que l'écart en puissance majore l'écart énergétique (voir section 6.4.4, $M \geq \frac{1}{2} \Delta$). Il en est de même pour les formes intégrées en temps, $\mathcal{J}_3 \geq \frac{1}{2} \mathcal{J}_2$. Dans le cas élastique, cette majoration devient une égalité (pas de termes dissipatifs dans le comportement, cf. 6.4.4). On le vérifie sur la figure 9.25 où $\mathcal{J}_2 \simeq 2\mathcal{J}_3$ ont été normalisés par le même coefficient. On a choisi une normalisation qui permet de superposer les écarts non intégrés en temps : ils sont confondus (courbes 4) aux erreurs numériques près.

L'analyse de ces courbes montre que la solution la meilleure semble effectivement se trouver dans un voisinage de A , comme le laissait supposer le tracé des efforts 9.24, mais surtout, on retrouve le fait que ces efforts ont été construits à partir des réponses B et B' , au niveau desquelles on constate l'existence de minima locaux. Pour les fonctionnelles non intégrées en temps (courbes 4), ils ne sont pas très nets. Ceci permet d'illustrer le fait, déjà signalé dans la section 6.4.4, que les formes intégrées en temps sont a priori plus performantes. En effet, les

l'essai SHPB, très sensible aux origines relatives des données expérimentales.

Sur la figure 9.23, on compare le traitement classique des vitesses expérimentales au même traitement réalisé sur les données calculées à partir des efforts et des paramètres identifiés. La différence des vitesses sortante et entrante fournit le taux de déformation ; il est beaucoup plus oscillant pour les données calculées, en particulier dans les premiers instants où l'«équilibre» n'est pas atteint. Cet «équilibre», ou plutôt déséquilibre, n'est pas l'équilibre *physique* (puisque les efforts sont très rapidement équivalents, figure 9.22) mais le déséquilibre engendré par le mauvais calage de l'origine des données. Par intégration, on obtient la déformation en fonction du temps qui bénéficie de l'effet régularisant de l'intégration. La vitesse moyenne de l'échantillon permet aussi de constater, de façon globale, l'effet de ce déséquilibre.

9.5 Algorithme génétique

L'emploi d'un algorithme génétique, plus lourd en temps de calcul que les méthodes de descente classiques, se justifie lorsque la fonctionnelle coût à optimiser n'est par exemple pas continue, pas dérivable, définie sur un ensemble discret ou, et c'est le cas qui nous préoccupe, s'il existe des minima locaux.

De façon générale, sur les cas que nous avons pu rencontrer, la variation de l'écart \mathcal{J} le long d'un segment dans l'espace des paramètres est, aux dérivées numériques près (voir par exemple le problème lié au calcul du gradient par différences finies, section 8.4.4, figure 8.2), relativement régulière et reste convexe (le segment se trouvant dans une zone physiquement acceptable...).

C'est pourquoi on cherche à simuler un essai pour lequel l'écart n'est *pas convexe*. Pour cela, on a choisi une sollicitation simple de l'échantillon : face sortante *encastrée* et déplacement sur la face entrante de forme *triangulaire* (lissée) qui impose une compression. Pour simplifier, on prend un comportement élastique. On considère les trois réponses en effort pour les valeurs

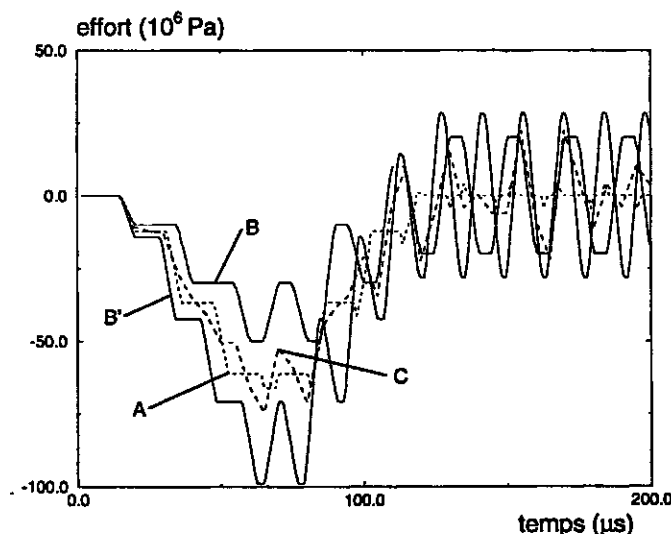


Figure 9.24 : Efforts simulés B , A , B' et moyenne C , face entrante

$E_B = 200\,000 \text{ MPa}$, $E_A = 300\,000 \text{ MPa}$ et $E_{B'} = 400\,000 \text{ MPa}$. Le graphe 9.24 représente ces trois réponses (courbes indicée respectivement B , A et B') ainsi que la *moyenne* des réponses B et B' (courbe $C = \frac{1}{2}(B + B')$), sur la face entrante de l'échantillon (l'allure étant similaire sur la face sortante). On constate que la réponse C , moyenne des réponses pour les modules E_B et

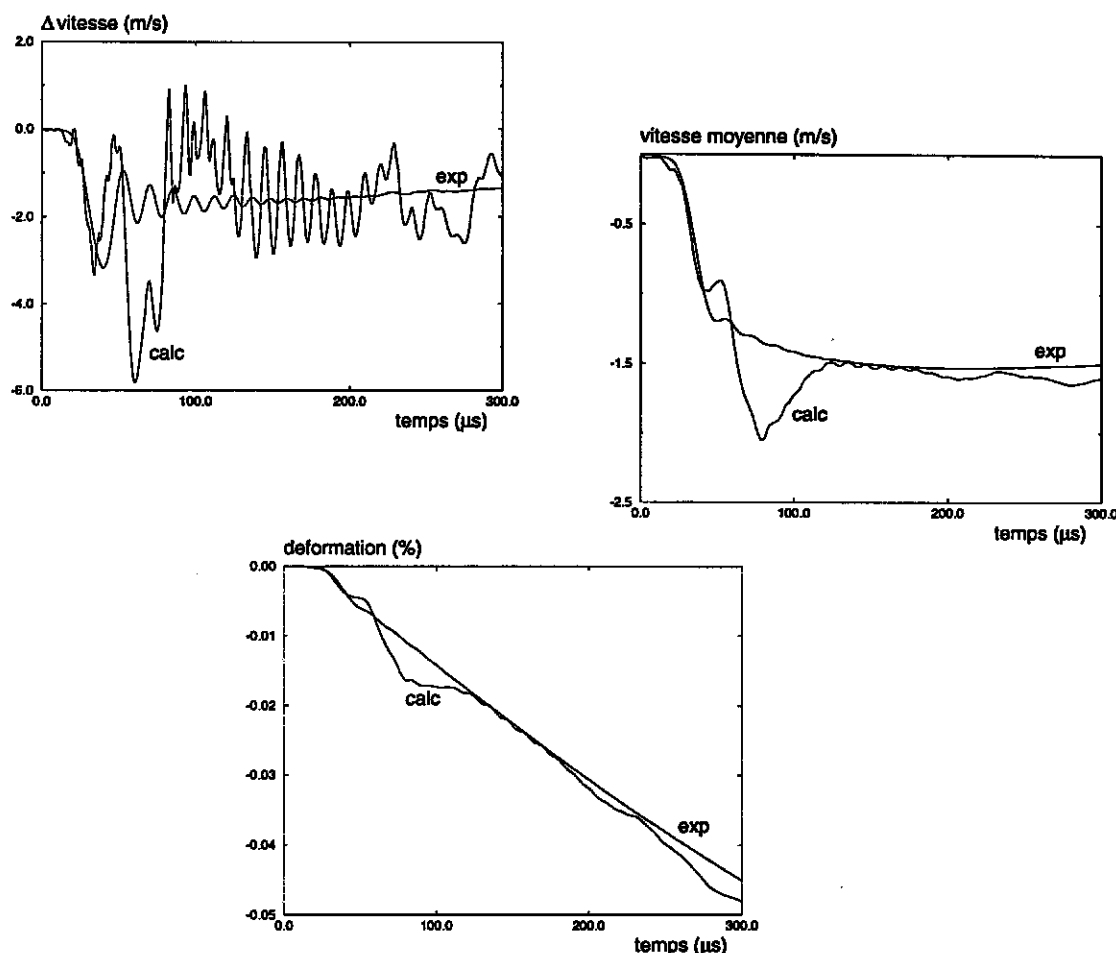


Figure 9.23 : Comparaison avec l'analyse classique, essai XES

vitesses présentent un écart de 7 à 8 μs , alors que les ondes dans un acier ont une célérité typique d'environ $5000 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 5 \text{ mm} \cdot \mu\text{s}^{-1}$ et que la longueur de l'échantillon est de 8 mm. Le temps de transfert ($8/5 = 1.6 \mu\text{s}$) est donc très mal représenté par les mesures des vitesses : il est trop long ; comme il correspond à une célérité des ondes bien plus faible que $5000 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, l'effet de ce décalage sur l'identification conduit à un module élastique trop faible.

Ceci est aussi dû au fait que l'écart employé est l'écart quadratique en effort, qui compare les efforts calculés à partir des vitesses expérimentales aux efforts expérimentaux : avec cet écart, une erreur sur les données en vitesses ne peut être contrebalancée par l'information sur les efforts (les données expérimentales en effort sont en quelque sorte "passives"). Cette difficulté est très liée au dispositif SHPB pour lequel il est souvent délicat de déterminer avec précision les origines relatives des trois ondes (Zhao, Gary, Rota [100]). Une erreur de calage des ondes induit bien entendu une erreur similaire pour les origines des courbes expérimentales de vitesse et d'effort.

L'utilisation de la fonctionnelle d'écart en puissance permet en revanche de prendre en compte de manière symétrique les données en effort et en vitesse : les paramètres E_t , η et σ_y identifiés sont dans ce cas à peu près identiques mais le module d'Young est un peu plus élevé - 121 000 MPa - (ce qui reste faible...).

Cet exemple illustre bien la difficulté (historique) de l'identification du module élastique par

Le tableau 9.4 donne les variations relatives des paramètres identifiés lors du bruitage des données expérimentales, par rapport aux paramètres exacts. La continuité est numériquement

paramètre	E	E_t	η	σ_y	écart \mathcal{J}
bruit blanc 1%	1.020	0.962	1.049	0.935	0.978
bruit non blanc 2%	1.024	0.903	1.045	0.951	0.949

Tableau 9.4 : Effet du bruit

vérifiée puisque ces variations relatives restent de l'ordre de 2 à 4 %. La différence non négligeable qui existe entre vitesses calculées (figure 9.21, courbes e2 et s2) et vitesses données (figure 9.18 que l'on bruit) fait que la compatibilité des données bruitées dans le cas 2 n'est en fait pas très bonne, ce qui peut expliquer l'écart plus important (10 %) observé sur E_t . La dernière colonne du tableau montre de la même façon la continuité de l'écart par rapport aux conditions expérimentales. Bien entendu cet écart (valeur relative < 1) a diminué pour les paramètres identifiés dans les deux cas, et il a plus diminué dans le second puisque l'incompatibilité initiale était plus grande.

Remarque sur le dépouillement quasi-statique

On a vu qu'une méthode inverse pour le dépouillement d'un essai aux barres Hopkinson se justifie lorsque l'équilibre de l'échantillon n'est pas rapidement atteint (par rapport à la durée du test). Appliquons cette méthode à un essai sur un acier, pour lequel on sait que l'équilibre est rapidement atteint et le dépouillement classique licite.

E (Pa)	E_t (Pa)	η (Pa.s.m ⁻¹)	σ_y (Pa)	ρ (kg.m ⁻³)	L (m)
8.291 10 ¹⁰	1.902 10 ⁹	9.504 10 ³	4.7159 10 ⁸	8100.0	0.008

Tableau 9.5 : Paramètres initiaux

Les données expérimentales sont présentées figure 9.22. L'identification est réalisée avec un écart quadratique en effort. Les résultats sont consignés dans le tableau 9.5. Sur ces paramètres

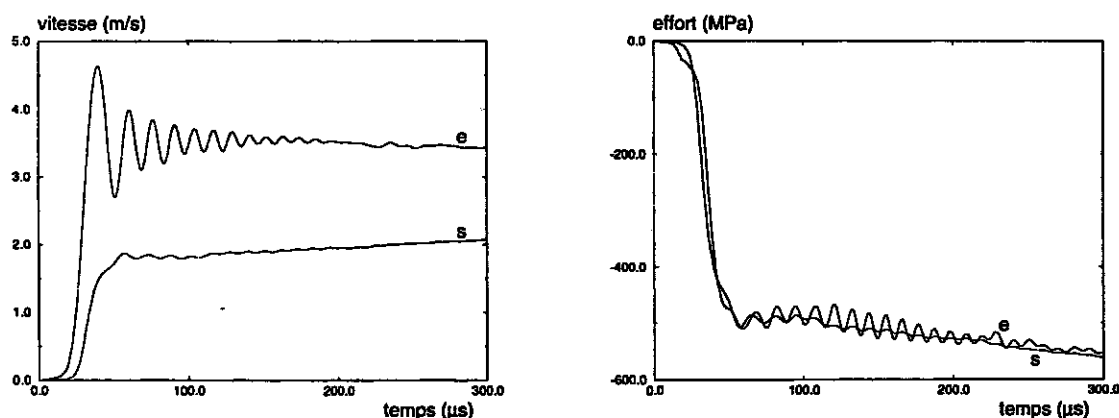


Figure 9.22 : Vitesses et efforts, essai acier

on remarque tout de suite la valeur identifiée du module d'Young - 83 000 MPa - qui est bien trop faible pour un acier ! Pourquoi une valeur si faible ? On remarque que les données en

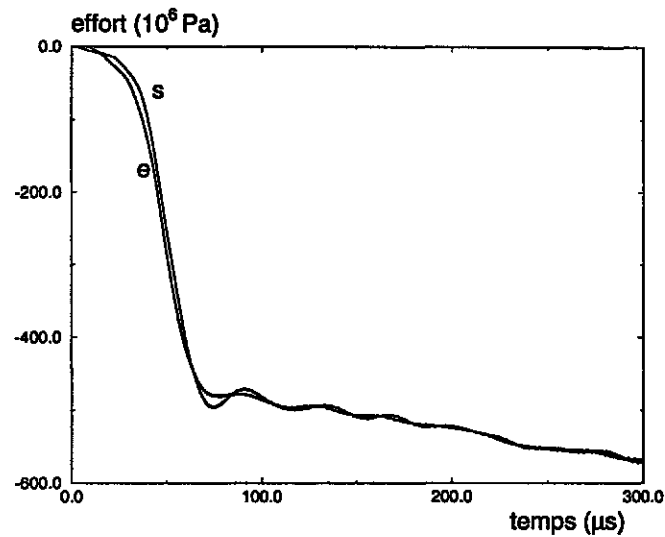


Figure 9.20 : Histoire des efforts

suivante. Le bruit non blanc correspond physiquement à l'ajout d'une (petite) force sur l'une des faces de l'échantillon ; il s'ensuit un déséquilibre de l'échantillon. La conséquence sur les vitesses est l'addition d'un mouvement de corps rigide, de masse celle de l'échantillon, produit par cette force parasite, ce que l'on vérifie numériquement sur les données de la figure 9.21. Il faut cependant remarquer que cette analyse, si elle permet d'expliquer l'effet d'un bruit non blanc, n'est en revanche pas *exacte*. En effet, elle ne permet pas, par exemple, de rendre un essai "symétrique" en retranchant aux efforts σ_e et σ_s l'effort moyen $\frac{1}{2}(\sigma_e + \sigma_s)$ (on obtient ainsi le chargement *symétrique* $\sigma = \pm \frac{1}{2}(\sigma_e - \sigma_s)$ sur chaque face) et en retranchant aux vitesses la vitesse moyenne v_m correspondant au mouvement de corps rigide associé (c'est à dire tel que $(\rho L) \dot{v}_m = \frac{1}{2}(\sigma_e + \sigma_s)$) : l'application de vitesses ou d'efforts *égaux* sur les *deux* faces de l'échantillon ne conduit bien évidemment *pas* à la solution de type mouvement de corps rigide (à cause des effets d'inertie...).

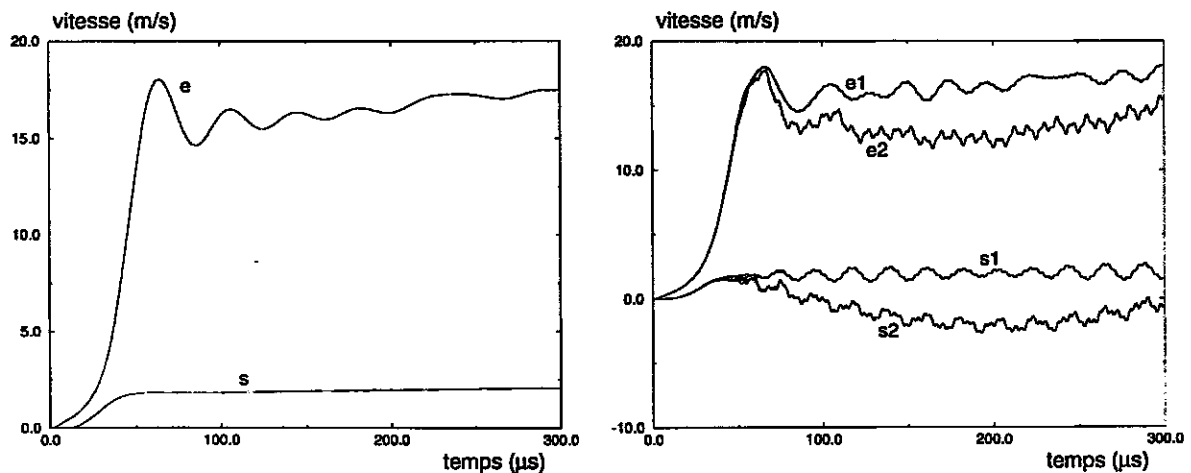


Figure 9.21 : Vitesses initiales et histoire des vitesses

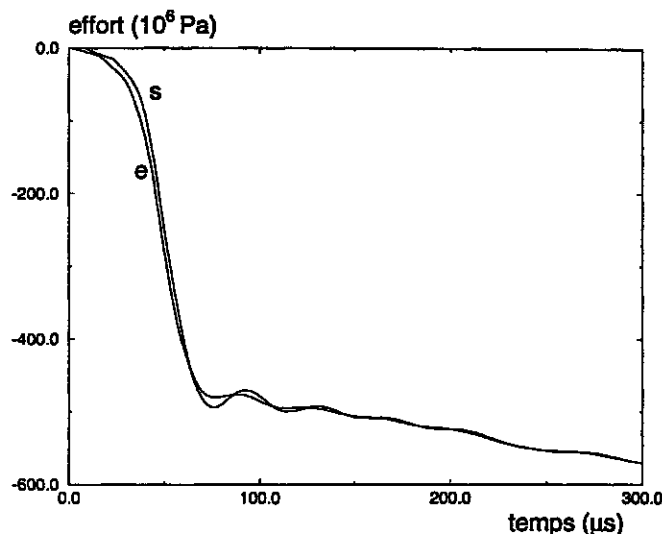


Figure 9.19 : Efforts sur les faces de l'échantillon

Dans les graphiques qui suivent, les données sur la face $x = 0$ sont repérées par e , sur la face $x = L$ par s (par référence à la barre de Hopkinson pour entrant et sortant) et les indices 1 et 2 indiquent le type de bruit. Les histoires de ces efforts et vitesses calculés sont données par les graphes 9.21 et 9.20. Par "histoire" on entend simplement l'évolution des données aux limites $v(t)$ et $\sigma(t)$ en fonction des itérations de l'algorithme.

Ce que l'on constate sur la figure 9.20 c'est que le bruit n'a quasiment pas d'influence sur les courbes d'efforts, qui sont confondues avec celle de la figure 9.19 (donnée "idéale" sans bruit) : la présence d'un bruit sur les vitesses n'affecte que très peu la réponse en effort. En revanche les réponses en vitesse sont plus sensibles, et de manière différente selon le type de bruit sur les efforts (figure 9.21).

Un bruit blanc génère des oscillations (figure 9.21) de la réponse *autour* des données non bruitées (figure 9.18) dont l'amplitude est plus *forte* que sur les efforts. On peut avancer l'explication suivante. Les ondes, lors de la partie visco-plastique de la réponse de l'échantillon, se déplacent à une célérité $c_t \simeq \sqrt{E_t/\rho}$, inférieure à la célérité des ondes élastiques ($c = \sqrt{E/\rho}$), et vérifient (en supposant les ondes *plastiques* et *non visco-plastique* comme l'impose le modèle) une relation de saut du type $[\sigma] = \rho c_t [v]$. On peut noter que l'échantillon, dans la phase du chargement représentée par le plateau, ne subit pas de décharge (élastique en l'occurrence) ce qui fait que toutes les ondes se déplacent à une célérité (proche de) c_t . Le rapport E/E_t est ici proche de 40 soit $c/c_t \simeq 6$. On a donc :

$$\frac{[v]}{v_y} = \frac{\sigma_y}{\rho c_t v_y} \frac{[\sigma]}{\sigma_y} \approx 8 \frac{[\sigma]}{\sigma_y} \quad (9.1)$$

pour $\rho = 8100 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $c_t = 849 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Les rapports $[v]/v_y$ et $[\sigma]/\sigma_y$ représentent le bruit relatif sur chacune de ces quantités, puisque $\sigma_y = 472 \text{ MPa}$ et $v_y = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (par exemple) sont de bons indicateurs de leur amplitude "globale". Ce rapport entre les bruits sur la vitesse et l'effort est donc expliqué, au moins qualitativement, par la relation (9.1) (le choix de v_y étant un peu arbitraire...).

Le bruit non blanc possède, en plus de ce qui vient d'être explicité pour le bruit blanc, un effet d'*ensemble* important sur la réponse en vitesse. Celui-ci s'interprète de la manière

Le fait de présenter, in fine, un élément de \mathcal{R}^{ad} comme résultat de l'algorithme d'identification du comportement est en fait plus significatif de la qualité de l'identification puisque cet élément est a posteriori *indépendant* des données.

Comme on l'a déjà exposé à la section 6.3, la suite de conditions aux limites en effort acquiert progressivement les "caractères" CA et, réciproquement, les conditions aux limites en vitesses, les "caractères" SA. Cet aspect est remarquable sur données sur la face sortante : la vitesse compatible présente les oscillations de la force expérimentale et la force tend à perdre son caractère oscillant.

Les graphiques 9.16 et 9.17 présentent les champs de vitesse et de contrainte (simulés) pour la solution compatible, construite à partir de l'identification sur du sel gemme, dans la longueur de l'échantillon et en fonction du temps. Ce type de vue permet de bien se rendre compte de la non homogénéité, à la fois spatiale et temporelle, des champs dans l'échantillon.

9.4 Effet du bruit

Comme on l'a prouvé dans les chapitres précédents, l'identification des paramètres de comportement est *stable* vis à vis d'une faible variation des données expérimentales fournies à l'algorithme.

On présente ici une approche numérique de ce phénomène. Pour cela, on considère un essai simulé qui représente bien un essai réalisé sur de l'acier, puisque ces efforts sont rapidement en équilibre (en fait, ces données simulées sont obtenues par l'algorithme de construction de conditions compatibles, à partir d'une identification sur un acier ; les vitesses et les efforts sont représentés respectivement figures 9.18 et 9.19).

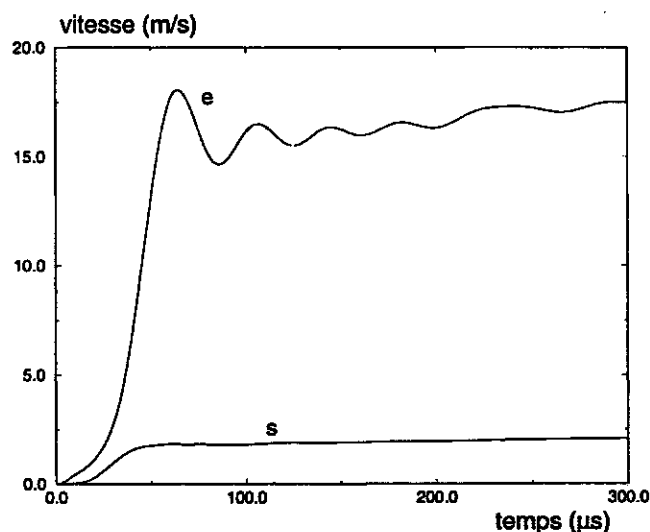


Figure 9.18 : Vitesses sur les faces de l'échantillon

L'idée est alors de *bruit* ces données et de refaire un calcul inverse, en suivant l'évolution des conditions aux limites *calculées* au cours de l'identification. Pour cela, on a choisi la fonctionnelle écart en puissance. Deux bruitages sont envisagés, un bruit blanc d'amplitude relative 1 % et un bruit non blanc d'amplitude 2 % (la composante moyenne de ce bruit suit une sinusoïde de basse fréquence par rapport à la durée de l'essai, $\omega = 10^4 \text{ s}^{-1}$, $T = 628 \text{ μs}$). Les vitesses et les efforts sont calculés à partir des efforts expérimentaux et des vitesses expérimentales (respectivement).

Les données expérimentales de départ et les données compatibles sont présentées figures 9.14 et 9.15. Les lettres *e* et *s* font référence aux données expérimentales sur les faces entrante et sortante, *ec* et *sc* aux mêmes grandeurs rendues compatibles par l'algorithme. Les conditions aux limites $v_{ec}(t)$, $v_{sc}(t)$, $\sigma_{ec}(t)$ et $\sigma_{sc}(t)$ correspondent en quelque sorte à la réponse du modèle de comportement (élément de \mathcal{R}^{ad}) la plus proche des données expérimentales.

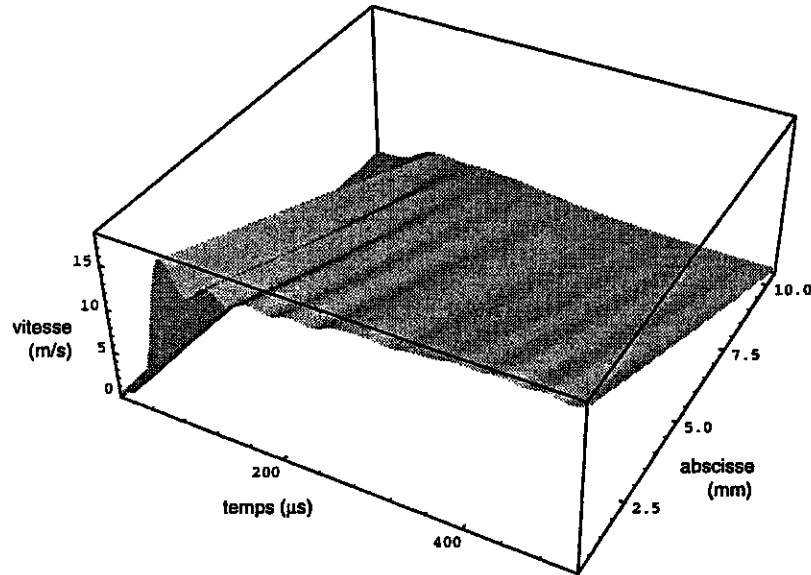


Figure 9.16 : Vitesses dans l'échantillon, identification sel gemme

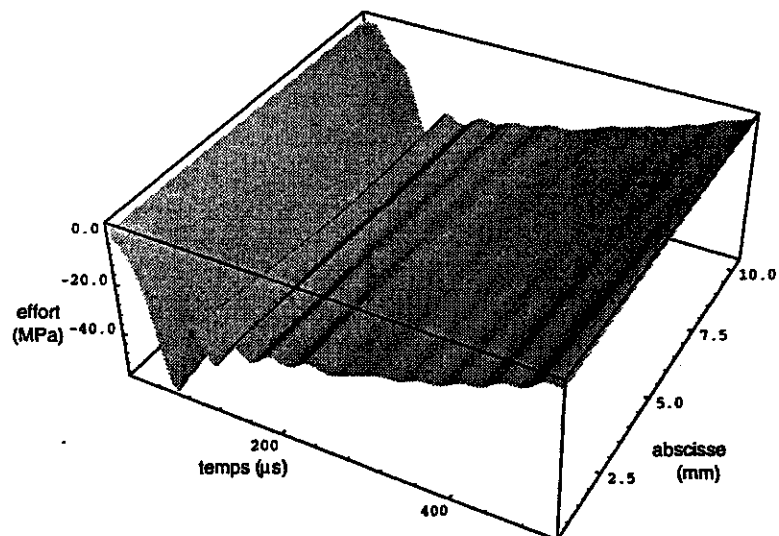


Figure 9.17 : Efforts dans l'échantillon, identification sel gemme

proprement dite, puisque c'est un cas où l'équilibre de l'échantillon n'est pas vérifié, où les efforts présentent d'importantes oscillations et où le dépouillement classique ne peut s'appliquer.

9.3 Construction de conditions compatibles

Comme on l'a vu dans la section 6.3, on dispose d'un algorithme qui permet de construire, à partir du calcul d'identification fait précédemment, un élément compatible qui se situe "entre" les solutions cinématiquement admissible (où $v_e(t)$ et $v_s(t)$ sont imposées) et statiquement admissible (où $\sigma_e(t)$ et $\sigma_s(t)$ sont imposés). Cette construction d'un élément de \mathcal{R}^{ad} permet de visualiser en quelque sorte la qualité de la solution.

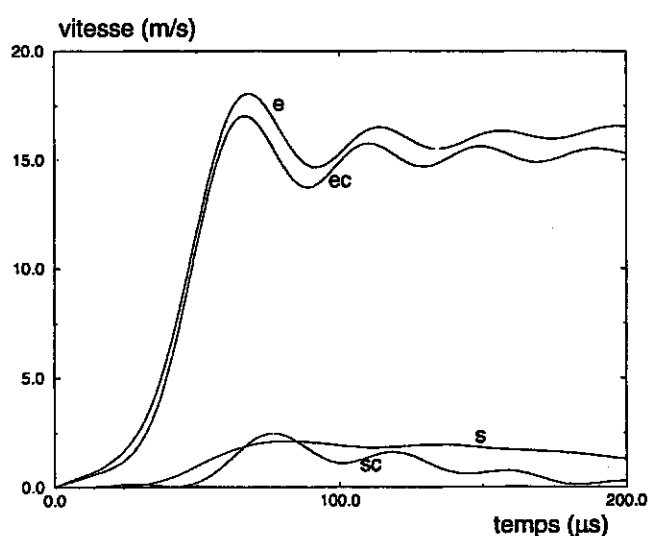


Figure 9.14 : Vitesses compatibles

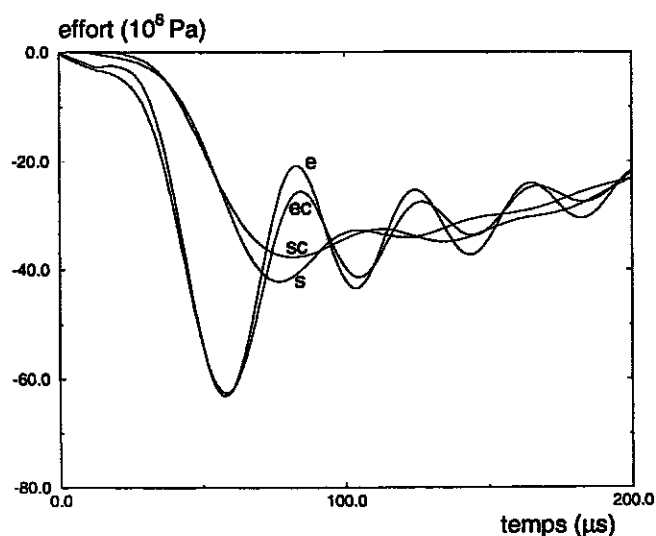


Figure 9.15 : Efforts compatibles

charge de l'échantillon, c'est à dire le flanc de montée et la première oscillation sur la force entrante ($t \leq 60\mu s$), et la mise en équilibre progressive de l'échantillon ($t \geq 60\mu s$). On prend donc ce résultat comme base de comparaison.

Les courbes issues de l'identification sur $80\mu s$ présentent en revanche une dérive assez importante au delà de la durée d'identification, ce qui est somme toute logique. On constate d'autre part que le module élastique E est bien plus faible que pour l'identification sur $120\mu s$: ceci peut s'interpréter par le poids plus grand qu'ont la première oscillation de la force entrante et le décrochement que présente la force sortante à $t \simeq 35\mu s$, lorsque l'on se limite à une durée de $80\mu s$. La valeur de la viscosité η est du même ordre de grandeur pour $80\mu s$ et $120\mu s$ puisque c'est ce paramètre qui gouverne la période des oscillations. Le module tangent E_t est assez mal identifié puisque la "pente moyenne" du plateau est en quelque sorte indéterminée avant $80\mu s$.

Pour l'identification sur $200\mu s$ on observe par contre l'effet inverse : le plateau a un poids trop important : les paramètres identifiés sont alors tels que la réponse est globalement d'amplitude plus faible. Le module élastique E est donc plus faible ainsi que le seuil σ_y et le module tangent E_t .

C'est pourquoi un indicateur intéressant de la qualité de l'identification est la valeur de l'écart \mathcal{J} après convergence de l'algorithme, ramené à l'unité de temps (tableau 9.3 et graphe 9.13). En

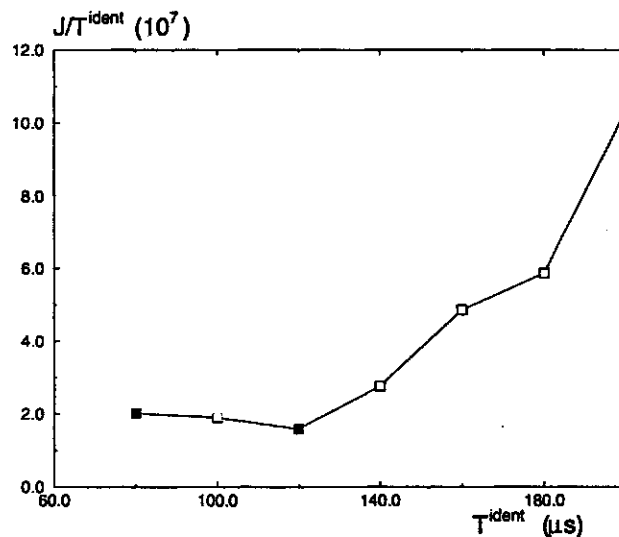
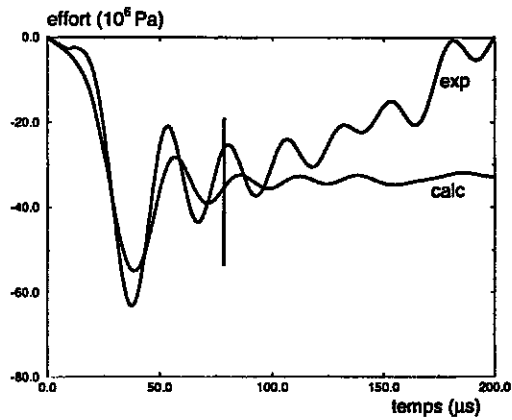
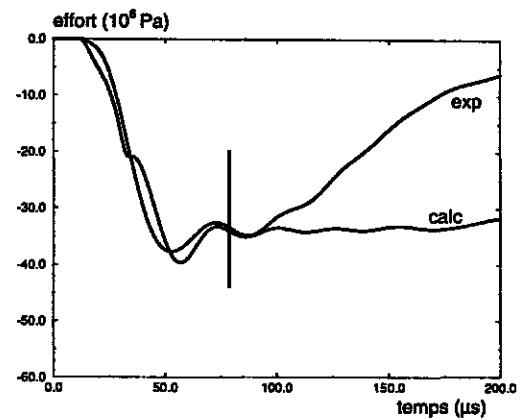
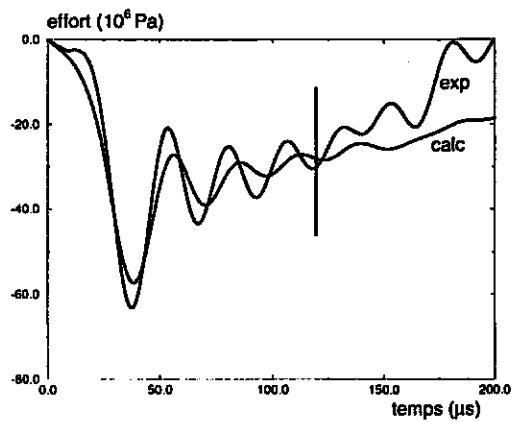
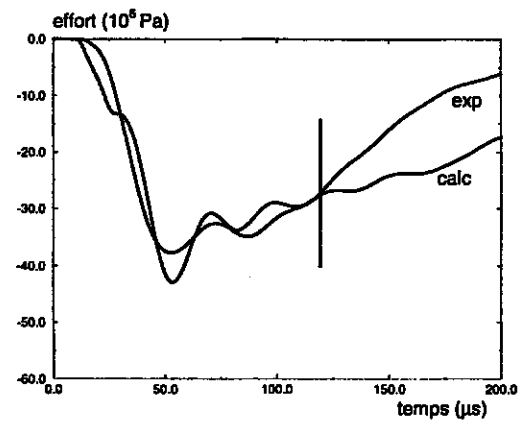
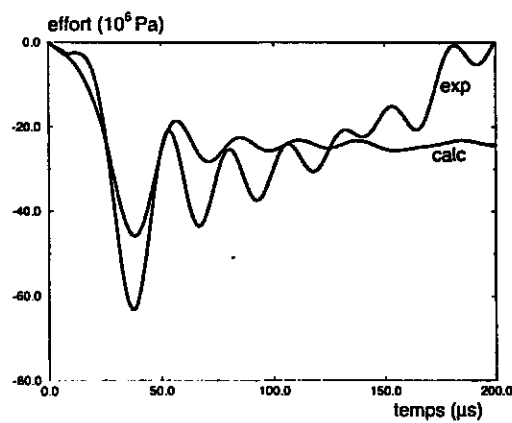
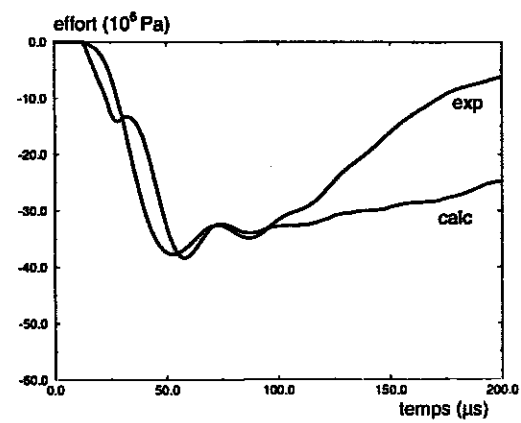


Figure 9.13 : Evolution de \mathcal{J}/T^{ident}

dessous de $80\mu s$ l'identification ne va quasiment concerner que le module élastique, si bien que l'identification peut être correcte mais sûrement pas représentative de l'essai, et on s'est limité à la durée de $200\mu s$ pour laquelle \mathcal{J}/T^{ident} devient grand. La durée optimale d'identification correspond à $T^{ident} = 120\mu s$, minimum de \mathcal{J}/T^{ident} , ce qui conforte le constat visuel déjà fait a priori sur la meilleure qualité de cette identification.

Les résultats présentés montrent qu'il est assez difficile de réaliser une identification "précise" à partir de données expérimentales, vu l'accord que l'on obtient entre celles-ci et les grandeurs calculées. Il faut cependant modérer cet aspect par le fait que le modèle de comportement utilisé ne comporte que quatre paramètres et que ce n'est peut être pas le modèle idéal pour décrire le comportement dynamique d'un sel gemme (un modèle présentant de l'endommagement serait en principe mieux adapté). Ceci dit, cet exemple sert plutôt de *test* pour la méthode, avec un modèle de comportement simple et permettant une simulation rapide, que d'une identification

Figure 9.7 : Sel gemme, effort entrant, identification sur 80 μs Figure 9.10 : Sel gemme, effort sortant, identification sur 80 μs Figure 9.8 : Sel gemme, effort entrant, identification sur 120 μs Figure 9.11 : Sel gemme, effort sortant, identification sur 120 μs Figure 9.9 : Sel gemme, effort entrant, identification sur 200 μs Figure 9.12 : Sel gemme, effort sortant, identification sur 200 μs

par rapport à x est :

$$s(x) = \frac{x}{f(x)} \frac{df(x)}{dx} = \frac{2x}{x - x_0}$$

qui tend vers l'infini lorsque $x \rightarrow x_0$. Dans la pratique, l'écart \mathcal{J} tend vers 0, aux erreurs numériques près ($\log(\mathcal{J})$ stagne à -16 sur la figure 9.5) ce qui rend incertaines les valeurs des sensibilités. Il faut noter que ce cas n'est gênant pour le calcul des sensibilités que dans le cas de données *idéales* pour lesquelles on a donc $\mathcal{J} \rightarrow 0$; dès que celles-ci présentent une incompatibilité la valeur minimum de \mathcal{J} reste strictement positive. Ce cas sera présenté dans la section suivante.

L'expression analytique du gradient de \mathcal{J} par rapport aux paramètres de comportement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial E} &= \int_0^L \int_0^T \left[\frac{1}{E^2} \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial E} \right] \hat{e} dx dt \\ \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial p_i} &= \int_0^L \int_0^T \left[-\frac{\partial g}{\partial p_i} \right] \hat{e} dx dt \quad (p_i \neq E) \end{aligned}$$

permet de comprendre comment l'état adjoint intervient dans le calcul des sensibilités. Chaque sensibilité est obtenue par le produit de la déformation adjointe \hat{e} par la dérivée du comportement par rapport au paramètre relatif à cette sensibilité. L'état adjoint intervient donc de la même façon pour toutes les sensibilités, la différence étant due en quelque sorte à la sensibilité du comportement vis à vis de chaque paramètre, à travers $\frac{\partial g}{\partial p_i}$.

9.2 Données expérimentales

Dans cette section on teste l'algorithme sur des données issues d'un essai réel. Cet essai, réalisé sur un échantillon de sel gemme, présente un intérêt vis à vis de la méthode puisque les efforts sur les faces entrante et sortante sont très différents : le dépouillement classique qui suppose l'équilibre de l'échantillon ne peut pas s'appliquer et l'approche inverse se justifie pleinement. L'essai a été réalisé au L.M.S. sur des barres de diamètre 40 mm en aluminium et l'échantillon présente une longueur et un diamètre identiques de 36 mm. La durée de la mesure est de 300 μs .

La mesure d'écart choisie est l'écart en puissance intégré en temps. L'identification est réalisée sur différentes durées et les résultats sont rassemblés dans le tableau 9.3.

T^{ident}	$E (Pa)$	$E_t (Pa)$	$\eta (Pa.s.m^{-1})$	$\sigma_y (Pa)$	\mathcal{J}/T^{ident}
80 μs	$1.4863 \cdot 10^{10}$	$-1.4406 \cdot 10^8$	$5.2424 \cdot 10^4$	$1.6694 \cdot 10^7$	$2.0182 \cdot 10^7$
120 μs	$1.8693 \cdot 10^{10}$	$-4.2691 \cdot 10^8$	$7.5995 \cdot 10^4$	$1.0301 \cdot 10^7$	$1.5859 \cdot 10^7$
200 μs	$1.4737 \cdot 10^{10}$	$-0.9413 \cdot 10^8$	$4.4912 \cdot 10^4$	$0.8673 \cdot 10^7$	$10.3552 \cdot 10^7$

Tableau 9.3 : Paramètres identifiés pour le sel gemme

Les figures 9.7 à 9.12 donnent une idée "visuelle" de l'identification, en comparant les efforts calculés (à partir des vitesses *expérimentales* et des paramètres identifiés) et les efforts expérimentaux, respectivement sur les faces entrante et sortante, et pour les trois durées d'identification (représentées par une barre verticale). On a choisi de présenter les efforts et non les vitesses puisque ce sont eux qui montrent le non-équilibre de l'échantillon.

On constate visuellement que la meilleure identification est celle réalisée sur une durée de 120 μs . En effet, c'est sur les courbes 9.8 et 9.11 que l'on décrit au mieux à la fois la mise en

La figure 9.6 représente les conditions aux limites de l'état adjoint à la dixième itération. On rappelle que ces conditions sont les “vitesses” \hat{v} imposées (cf. section 8.4.3), puisque l'écart choisi est l'écart quadratique en effort (on a ici pris cet écart pour des raisons de simplicité, puisqu'il ne lui est associé qu'un seul état adjoint). On retrouve aussi que ce sont les conditions *finales* (homogènes) qui sont fixées dans le calcul de l'état adjoint. L'amplitude de la vitesse adjointe est, sur la figure 9.6 typiquement de 25 MPa alors que les efforts, sur la figure 9.2, sont de l'ordre de 500 MPa, soit quelques 5 % d'écart relatif entre les contraintes exactes et calculées.

Globalement, ces conditions aux limites montrent que l'amplitude des champs adjoints est la plus élevée au début du chargement : en interprétant les champs adjoints comme des “forces de rappel” vers les données expérimentales (simulées dans ce cas) on voit que c'est dans la première partie du chargement que le système est le plus contraint (au sens du problème de minimisation). Au fur et à mesure des itérations, l'intensité de l'état adjoint décroît. Dans les cas idéal des données simulées, lorsque l'algorithme a convergé, on a égalité des efforts calculés et des efforts expérimentaux $\sigma \simeq \sigma^d$, soit $\hat{v} \simeq 0$ en $x = 0$ et $x = L$: l'état adjoint est alors nul puisque les conditions initiales et aux limites le sont.

On définit la sensibilité $s(p_i)$ de l'algorithme par rapport au paramètre p_i par la dérivée logarithmique de l'écart par rapport au paramètre :

$$s(p_i) = \frac{\partial \log(\mathcal{J})}{\partial \log(p_i)} = \frac{p_i}{\mathcal{J}} \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial p_i}$$

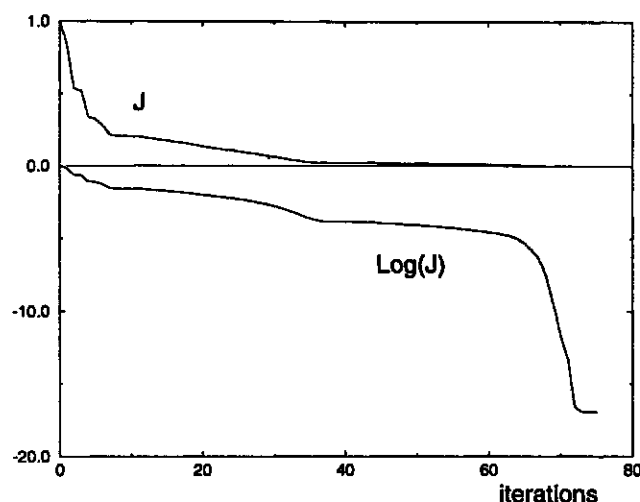
Ces expressions correspondent simplement à une normalisation (locale) de chacune des composantes du gradient de l'écart, par l'écart et le paramètre relatif à cette composante. Ces quantités présentent bien entendu l'avantage d'être comparables.

itération	it 00	it 20	it 40	it 60
$s(E)$	-18.53	12.62	30.28	194.68
$s(E_t)$	3.78	-1.71	-1.83	-1.92
$s(\eta)$	2.15	2.64	3.07	6.58
$s(\sigma_y)$	-1.54	-1.87	-4.59	-8.01

Tableau 9.2 : Sensibilités

Toujours pour le même exemple, les sensibilités, à certaines étapes de l'algorithme, sont regroupées dans le tableau 9.2. Celles-ci permettent d'expliquer les constatations heuristiques formulées précédemment. Une première remarque concerne le signe des sensibilités : lorsque le paramètre est *inférieur* (resp. *supérieur*) à la valeur vraie, il faut l'augmenter (resp. le diminuer) pour faire décroître \mathcal{J} ce qui explique le signe négatif (resp. positif) de la sensibilité. Ceci est cohérent avec les courbes d'évolution des paramètres 9.3 et 9.4.

La sensibilité par rapport à E est la plus grande : si le module élastique est mal identifié, on a peu de chances de se trouver sur une solution acceptable. Pour E_t en revanche, la sensibilité est tout de même assez forte, mais il faut pondérer ce fait par les grandes variations de ce paramètre au cours des itérations (figure 9.3). Les sensibilités par rapport à η et σ_y sont comparables mais de signe opposé ce qui explique la compétition entre ces paramètres. D'autre part ces deux sensibilités croissent sensiblement dans les dernières itérations : de façon générale, lorsque l'on se rapproche de la solution exacte, dans les dernières itérations, les sensibilités deviennent grandes, et même non significatives (elles ne sont donc pas reportées dans le tableau 9.2), pour la raison suivante : considérons la fonction $f(x) = k(x - x_0)^2$, quadratique et nulle en $x = x_0$, qui peut représenter l'écart \mathcal{J} , nul lorsque les paramètres sont les vrais paramètres. La sensibilité de f

Figure 9.5 : Evolution de \mathcal{J} et $\log(\mathcal{J})$

pour les dernières itérations (on a normalisé \mathcal{J} par sa valeur initiale). On peut remarquer que pour les dernières itérations, la décroissance de $\log(\mathcal{J})$ est quasiment linéaire ce qui implique une décroissance géométrique de \mathcal{J} . Au voisinage de son minimum la fonctionnelle peut être assimilée à une forme quadratique des paramètres (cf. section 8.4.3, *Effets d'une variation des données*), ce qui entraîne de même une décroissance géométrique, pour l'itération courante, de l'écart des paramètres aux paramètres exacts.

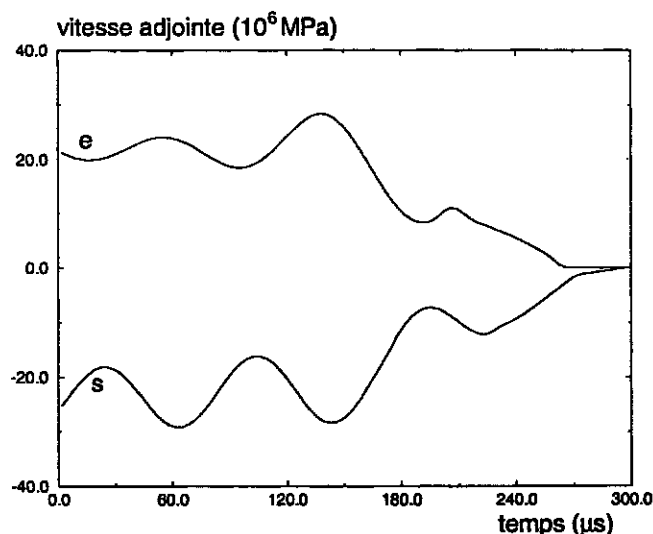
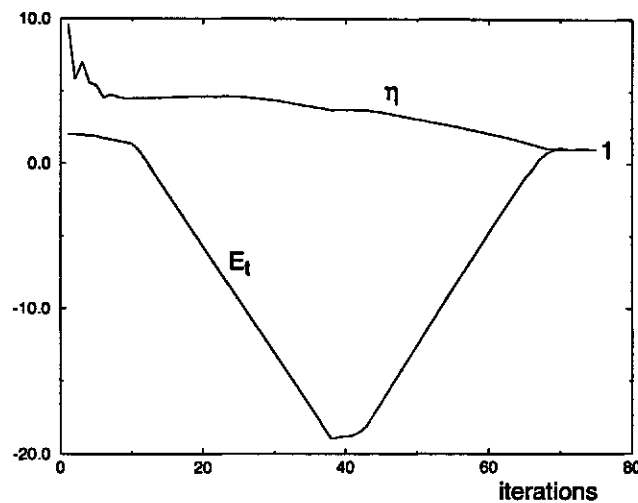


Figure 9.6 : Etat adjoint, fonctionnelle quadratique

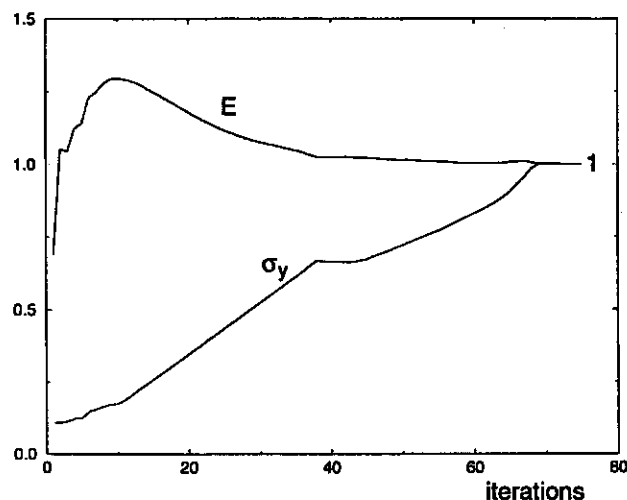
L'évaluation du gradient pour cette identification est réalisée par la méthode de l'*état adjoint*. Le comportement de l'algorithme est bien entendu équivalent avec une évaluation par différentiation directe (la comparaison de ces méthodes est faite à la section 7.4.6). L'état adjoint apporte cependant des informations supplémentaires qui permettent certaines interprétations.

Figure 9.3 : Evolution de η et E_t

plastique (figure 8.1). Lorsqu'on a dépassé le seuil plastique σ_y , l'effet de la viscosité η , si l'on suppose la vitesse de déformation quasiment constante, joue un rôle équivalent au seuil σ_y . C'est pourquoi on observe ce phénomène de "compétition" entre seuil plastique et viscosité du modèle.

En ce qui concerne le module élastique tangent E_t , il est logique, à la lumière de l'analyse précédente, qu'il soit identifié en dernier : il est en effet illusoire de déterminer la *pente* du plateau plastique (voir par exemple la courbe des efforts 9.2) tant que le niveau de celui-ci (défini par σ_y et η) n'est pas à peu près fixé. La sensibilité de l'algorithme à E_t est faible dans les premières itérations.

Parallèlement à l'évolution des paramètres, on suit l'évolution de l'écart au cours des itérations. La figure 9.5 présente la décroissance de \mathcal{J} et de son logarithme, plus significatif

Figure 9.4 : Evolution de E et σ_y

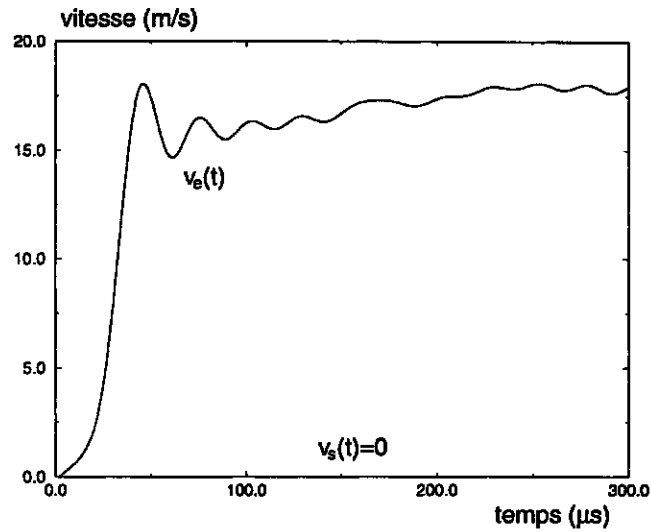


Figure 9.1 : Vitesses imposées

un premier temps et par souci de simplicité, la fonctionnelle choisie est l'écart quadratique en effort :

$$\mathcal{J} = \int_0^T \frac{1}{2} [\sigma - \sigma^d]_{x=0}^2 dt + \int_0^T \frac{1}{2} [\sigma - \sigma^d]_{x=L}^2 dt$$

De manière heuristique sur quelques exemples, on peut constater une sensibilité grande de l'algorithme, dans les premières itérations, à la valeur du module d'élasticité : concrètement, c'est le paramètre qui nécessite le moins d'itérations pour être raisonnablement proche de sa valeur vraie.

En suivant le processus d'identification (figures 9.3 et 9.4), on constate, sur l'exemple choisi, que η décroît alors que σ_y croît. Pour l'expliquer, il suffit d'analyser le modèle élasto-visco-

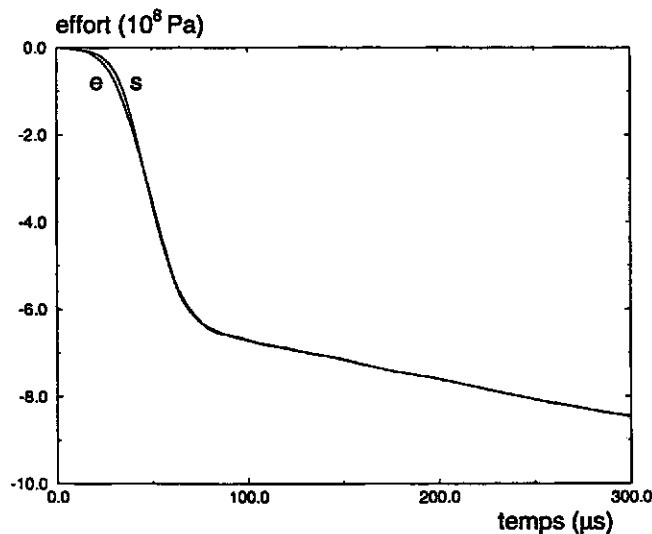


Figure 9.2 : Efforts simulés

9

Application, exemples

RÉSUMÉ : Dans ce chapitre, on donne quelques applications et on teste la méthode d'inversion proposée. On s'intéresse tout d'abord à un problème idéal, qui repose sur des données simulées. Ensuite on applique la méthode à un dépouillement réel, auquel il est intéressant d'adjoindre l'algorithme de construction de conditions compatibles. On étudie ensuite l'effet du bruit et on présente enfin l'intérêt d'un algorithme génétique.

9.1 Données simulées

L'étude de l'algorithme d'identification du comportement passe tout d'abord par des essais sur des données simulées. On sait alors que les données que l'on utilise pour l'identification sont *compatibles* avec le comportement, c'est à dire que l'on se donne explicitement un élément de \mathcal{R}^{ad} . La donnée des vitesses (figure 9.1) sur les faces entrante $v_e(t)$ et sortante $v_s(t)$ conduit, pour les paramètres du tableau 9.1 à un problème direct bien posé qui permet le calcul des efforts sur les deux faces de l'échantillon (figure 9.2). Le comportement est élasto-visco-plastique, donné par le figure 8.1 (avec une viscosité linéaire, $m = 1$).

E (Pa)	E_t (Pa)	η (Pa.s.m ⁻¹)	σ_y (Pa)	ρ (kg.m ⁻³)	L (m)	T (μs)
1.0 10 ¹⁰	1.0 10 ⁹	9.9 10 ⁵	5.5 10 ⁷	5000.0	0.01	100.0

Tableau 9.1 : Paramètres du modèle (vrais)

On choisit ensuite des estimations initiales des paramètres du comportement (différentes bien entendu des vraies valeurs). Parmi les quatre paramètres du modèle, on peut estimer, avec un bon ordre de grandeur, le module élastique E qui correspond à la pente du flanc de montée des courbes d'effort. Le module tangent E_t correspond à la pente du "plateau" sur ces mêmes courbes. Le seuil plastique σ_y et la viscosité sont en revanche plus délicats à évaluer a priori (comme on l'explique plus loin, il contribuent *tous deux* au niveau du "plateau"). C'est pourquoi, sur les figures 9.3 et 9.4 qui représentent l'évolution de ces paramètres en fonction du nombre d'itérations de l'algorithme, on a pris comme paramètres initiaux pour l'algorithme $0.7 E^{\text{exact}}$, $2.0 E_t^{\text{exact}}$, $10.0 \eta^{\text{exact}}$ et $0.1 \sigma_y^{\text{exact}}$. Sur ces figures, les valeurs ont été normalisées par les valeurs exactes. L'algorithme est de type quasi-Newton (BFGS, voir section 8.3.1). Dans

est particulièrement important lorsque l'évolution est déjà avancée et qu'apparaissent plusieurs zones potentiellement optimales, tandis qu'au début d'algorithme il représente une contrainte inutile.

La mutation

La mutation consiste à altérer de manière aléatoire les éléments de la population Π'' pour obtenir la $(j + 1)^{\text{ième}}$ population. Comme pour les opérateurs de sélection et de croisement, la mutation doit être adaptée au problème, ainsi pour le cas de vecteurs de \mathbb{R}^n qui nous préoccupe, la mutation peut par exemple consister en un bruitage de chaque coordonnée du vecteur. Ce bruit aléatoire est centré en zéro et l'importance de la mutation contrôlée par l'amplitude et l'écart type de ce bruit. Il est clair que cet opérateur d'évolution privilégie l'objectif d'*exploration* par rapport à celui d'*exploitation*. Si ce bruit est trop important, l'information présente dans les individus de la population courante est détruite et la recherche devient équivalente à une recherche aléatoire. Dans cet ordre d'idées, il est avantageux de réduire l'intensité des mutations en fin d'évolution pour obtenir une population courante suffisamment stable.

8.6 Récapitulation

Globalement, deux grandes classes de méthodes peuvent être utilisées selon qu'elles utilisent ou non le gradient de la fonctionnelle à optimiser. Celles qui ne l'utilisent pas sont plus lourdes en temps de calcul, mais sont généralement à même de détecter des minima locaux, puisqu'a priori rien n'impose à la fonctionnelle d'être convexe. Les algorithmes qui utilisent le gradient convergent plus vite mais sont contraints à ne fournir qu'un minimum local si celui-ci est découvert en premier. L'idée peut donc être de coupler les deux stratégies : détection de minima locaux avec une méthode du premier type puis recherche par une méthode de gradient au voisinage du "meilleur" des minima. Le calcul du gradient le plus efficient est réalisé par la méthode de l'état adjoint (en terme de temps de calcul et à précision équivalente à celle de la différentiation directe).

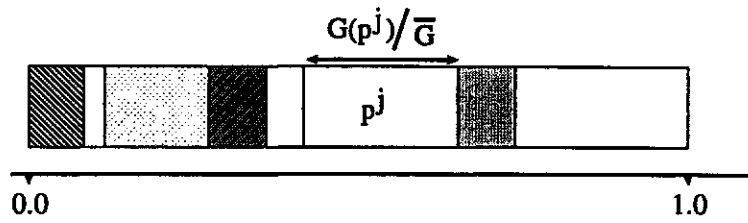


Figure 8.3 : Sélection par tirage à la roulette

de la sélection. C'est pourquoi, dans la pratique, la sélection ne repose pas en fait directement sur la fonction de performance G mais sur une fonction $TSR(p)$ (pour *Target Sampling Rate*) construite à partir de G , présentant des variations similaires et dépendant de paramètres permettant d'ajuster la sélection. D'autre part, pour la détermination de minima locaux, cette fonction $TSR(p)$ prend en compte le nombre de voisins proches : sans cela, dès qu'un minimum local est découvert, il exerce, de par la sélection, une attraction d'autant plus grande que la concentration de population aux voisinage de cet optimum est élevée. En conséquence, un autre minimum local, initialement moins peuplé ne sera pas découvert. Une concentration de population doit donc faire décroître la fonction $TSR(p)$.

Le croisement

Le croisement permet de générer à partir de deux individus de Π' , deux individus enfants appartenant à Π'' . Empiriquement, on constate que cet opérateur d'évolution est le plus puissant des trois. D'autre part, cet opérateur réalise plutôt un objectif d'*exploitation* que d'*exploration* puisque le croisement est fait de manière à ce que les vecteurs enfants restent assez proches des vecteurs parents. Pour des vecteurs dans \mathbb{R}^n , on réalise le croisement suivant, à partir des parents :

$$\begin{cases} p' = \{p'_1, p'_2, \dots, p'^n\} \\ q' = \{q'_1, q'_2, \dots, q'^n\} \end{cases}$$

on construit :

$$\begin{cases} p'' = \{\alpha_1 p'_1 + (1 - \alpha_1) q'_1, \alpha_2 p'_2 + (1 - \alpha_2) q'_2, \dots, \alpha_n p'_n + (1 - \alpha_n) q'_n\} \\ q'' = \{\alpha_1 q'_1 + (1 - \alpha_1) p'_1, \alpha_2 q'_2 + (1 - \alpha_2) p'_2, \dots, \alpha_n q'_n + (1 - \alpha_n) p'_n\} \end{cases}$$

avec $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ tel que $0 \leq \alpha_j \leq 1, \forall j$ qui représente les pondérations des caractères de chacun des deux parents. Celles-ci peuvent être tirées au hasard ou bien construites en s'appuyant sur les performances relatives des deux parents.

Comme pour une population biologique, il faut espérer construire des enfants au moins aussi performants que leurs parents. Il peut cependant arriver qu'aucun des enfants ne possède les bons traits de leurs parents. Il faut alors mettre en œuvre un test permettant de rejeter ces individus (Manner, Manderick [77]). Ce cas de figure peut notamment arriver lorsque l'on croise deux individus se trouvant chacun au voisinage d'un minimum local ; les enfants se retrouvent (avec le croisement explicité plus haut) "entre" ces minima locaux de la fonction F à minimiser, par conséquent, leurs performances ont toutes les chances d'être inférieures à celles des parents (on se retrouve sur une "bosse" de F). C'est pourquoi, des méthodes ont été développées qui utilisent des heuristiques de croisement restreint (Goldberg, Richardson [50]). Cet aspect

8.5.2 Initialisation et critère d'arrêt

La génération de la population initiale Π_0 se fait, si l'on ne possède pas d'information a priori sur le système, de façon aléatoire. Généralement, les vecteurs p formant la population déterminent des caractéristiques *physiques* d'un système, par conséquent la partie \mathcal{W} à laquelle ils appartiennent est *bornée* (dans \mathbb{R}^n). Bien entendu, toute information complémentaire doit être prise en compte en vue d'améliorer la performance moyenne de la population initiale puisque le choix de la population oriente l'évolution ; notamment on a intérêt à forcer l'introduction dans Π_0 d'éléments p dont on connaît la (bonne) performance.

Le critère d'arrêt représente une difficulté importante de ce genre d'approche. En effet, l'évolution de la performance d'une population n'est pas forcément monotone (des "accidents" dans l'évolution peuvent générer une population de Π_{j+1} moins bonne que Π_j). Il faut donc considérer un critère fondé sur l'évolution moyenne de la performance dans le temps (i.e. sur les quelques dernières générations). Lorsque celle-ci n'évolue pratiquement plus, l'algorithme ne peut plus progresser. On ajoute encore dans la pratique un test sur le nombre maximal de générations.

8.5.3 Opérateurs d'évolution

Les opérateurs d'évolution jouent un rôle double : tout d'abord, le processus génétique doit *exploiter* les zones dans lesquelles les individus possèdent une performance correcte, c'est à dire qu'au fil des générations, une partie stable de la population reste confinée dans la zone en question. Ensuite, l'évolution doit permettre l'*exploration* des zones inconnues par un certain nombre d'individus. Ces deux objectifs assignés aux opérateurs d'évolution sont clairement antagonistes (Goldberg [49]) puisque la taille de la population reste identique d'une génération à la suivante.

La sélection

L'objectif de la sélection est de transformer la population courante Π_j en Π' en supprimant d'une part les individus inadaptés et en dupliquant d'autre part ceux qui possèdent une performance supérieure à la moyenne, en respectant bien entendu la contrainte de cardinal constant de la population.

Si la sélection est insuffisante, trop d'individus inadaptés sont conservés, les individus performants, insuffisamment dupliqués, risquent d'être perdus lors des opérations de croisement et de mutation et en conséquence l'évolution est ralentie. Si la sélection est en revanche trop puissante, la diversité génétique de la population se trouve appauvrie et l'évolution risque de stagner.

En pratique, cette sélection opère en s'appuyant sur la performance relative $G(p^j)/\bar{G}$ de chacun des k individus par rapport à la performance moyenne \bar{G} de la population. Le tirage à la roulette utilise un tirage aléatoire uniforme de k points sur $[0, 1[$ que l'on a partitionné en k intervalles de longueurs $G(p^j)/\bar{G}$; le nombre de points tombant dans l'intervalle correspondant à p^j fournit le nombre de copies de p^j présentes dans Π' (figure 8.3). Une variante de ce tirage, appelée *méthode du reste stochastique*, consiste à recopier d'emblée chaque individu un nombre de fois égal à la partie entière de sa performance relative $G(p^j)/\bar{G}$ et de compléter la population par un tirage à la roulette, avec des cases de longueur proportionnelles à la partie décimale de $G(p^j)/\bar{G}$.

On constate l'importance du choix de la fonction performance ; en effet, si par exemple on remplace G par G^2 les performances relatives des individus sont modifiées et par là, le résultat

par un processus d'*intégration*, qui a pour effet de *régulariser* le calcul. L'intégration dont il est question est celle de la relation (8.5) ou la convolution avec l'état adjoint (relations (8.19, 8.20)). La comparaison numérique du gradient obtenu par différentiation directe et par état adjoint conduit à des différences relatives sur chaque coordonnée de $\nabla \mathcal{J}$ de l'ordre de 10^{-2} à 10^{-4} selon la discrétisation de l'échantillon utilisée (c'est à dire dans un domaine *usuel* de quelques dizaines de pas en espace). Ceci permet en outre de *valider* l'évaluation numérique du gradient.

8.5 Algorithmes génétiques

8.5.1 Principe

Le but est l'optimisation d'une fonction coût F qui dépend du vecteur de paramètres (réels) $p \in \mathcal{W} \subset \mathbb{R}^n$. Les algorithmes génétiques, proposés par Holland (Holland [55]), utilisent une population Π de k individus, qui forment un ensemble de vecteurs $\{p^1, p^2, \dots, p^k\}$ de même nature que p , à laquelle on applique, pour passer à la génération suivante, un certain nombre de règles d'*évolution* liées à la performance de chaque individu par rapport à la fonction coût. Dans le cas de la minimisation de F , la performance G d'un individu sera d'autant meilleure que le coût F qui lui est associé est faible. Dégageons tout de suite quelques caractéristiques générales des algorithmes génétiques :

- le domaine d'application des algorithmes génétiques (AG) est plus vaste que celui des méthodes classiques. En effet, celles-ci utilisent, dans la plupart des cas, une fonction coût "assez régulière" tandis que les algorithmes génétiques autorisent une fonction coût non convexe, non dérivable, non continue, définie sur une partie \mathcal{W} de \mathbb{R}^n non nécessairement connexe ; c'est le cas notamment si certaines composantes des individus sont dans un espace discret et les autres sont réelles, problème pour lequel les méthodes "classiques" sont généralement inopérantes.
- en terme de temps de calcul (nombre d'évaluations de la fonction coût), les AG sont d'un ou deux ordres de grandeur plus coûteux que les méthodes d'optimisations classiques *lorsque celles-ci sont applicables*. La puissance actuelle de l'outil de calcul permet cependant de palier cet inconvénient dans bien des cas.
- avec les AG il est possible de détecter plusieurs minima locaux (pour un "bon" choix du paramétrage des opérateurs d'évolution) alors que les méthodes classiques d'optimisation restent bloquées sur le minimum (a priori local) détecté. Dans les situations où une méthode classique est applicable, il est alors intéressant de coupler les approches : l'algorithme génétique explore l'espace des individus et fournit de façon approchée les zones dans lesquelles se trouve un minimum local (on limite pour cela le nombre de générations, donc le coût, par un critère d'arrêt peu sévère) ; ensuite, une méthode classique prend le relais dans la zone du meilleur minimum local détecté.

Les étapes d'un algorithme génétique qui sont détaillées dans la suite sont les suivantes (Goldberg [49]) :

1. création d'une population initiale et évaluation de sa performance
2. application des opérateurs d'évolution, dans l'ordre :
 - sélection
 - croisement
 - mutation
3. évaluation de la performance de la nouvelle population et test d'arrêt (fin / retour en 1.)

- la différence finie nécessite $np + 1$ blocs de calcul et aucun stockage,
- la différentiation directe nécessite aussi $np + 1$ blocs de calcul et le stockage (3 blocs) de la solution du problème direct, utilisée pour le calcul du second membre,
- l'état adjoint conduit au gradient en 2 blocs de calcul : un pour le problème direct et un pour le calcul de l'état adjoint. Ces deux solutions doivent être stockées (6 blocs) en vue de leur convolution (expressions (8.19, 8.20)). (Une convolution représente au plus le quart d'un bloc de calcul).

La principale conséquence est le coût de calcul (linéairement) croissant avec le nombre de paramètres pour les deux premières méthodes tandis que la méthode de l'état adjoint n'utilise invariablement que *deux* blocs de calcul, plus autant de convolutions que de paramètres. En revanche, la place mémoire nécessaire au stockage des champs et champs adjoints peut devenir assez importante (de l'ordre de quelques Mo pour notre modèle unidimensionnel, ce qui implique une certaine attention si l'on applique la méthode à une situation bi- ou tri- dimensionnelle).

Pour un petit nombre de paramètres, la méthode de différentiation directe peut sembler intéressante. On se heurte cependant à un problème rédhibitoire dans la mise en œuvre de cette méthode, illustré par la figure 8.2. En effet, cette figure représente la fonctionnelle \mathcal{J} sur un segment dans l'espace des paramètres, l'abscisse relative variant de 0 à 1 sur ce segment (la fonctionnelle représentée est l'écart en puissance, normalisé ; les conditions aux limites pour ce calcul sont fixées ainsi que la discrétisation de l'échantillon). La courbe A est obtenue avec

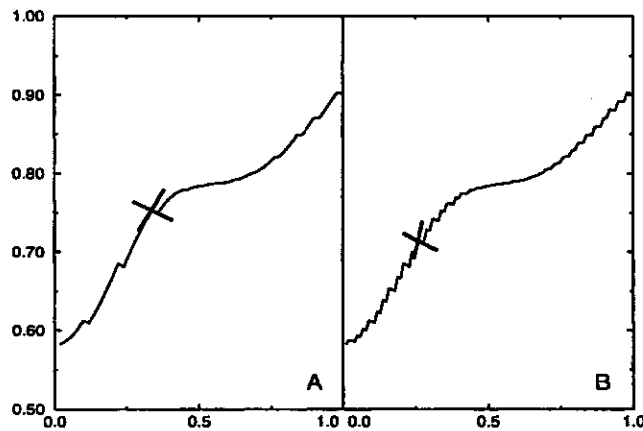


Figure 8.2 : Impossibilité d'utiliser les différences finies

un découpage régulier de $[0, 1]$ en 50 éléments et la courbe B avec 100 éléments. Le taux de variation de \mathcal{J} n'admet clairement pas de limite *numérique* : les petits segments représentent la dérivée de \mathcal{J} de part et d'autre d'un point anguleux. Les irrégularités des courbes s'expliquent par la discrétisation en temps imposée par la méthode des caractéristiques (le calcul est, en effet, effectué jusqu'au pas de temps le plus proche du temps T et le pas de temps Δt utilisé dépend du comportement, donc du point sur le segment dans l'espace des paramètres). Contourner cette difficulté serait possible mais le coût engendré est trop élevé, ce qui rend dans le cas présent caduque la méthode de calcul du gradient par différences finies.

Les deux autres méthodes sont au contraire beaucoup plus stables. En effet, cela se comprend bien si l'on considère que les coordonnées du gradient sont exprimées *analytiquement* et obtenues

2. Lors d'un test aux barres de Hopkinson, la vitesse et l'effort mesurés sur la face sortante de l'échantillon sont proportionnelles. En effet, les relations (2.3) permettent d'écrire (Z est donné) :

$$\sigma(x = L, t) = \frac{S_B}{S_E} \frac{E_B}{C_B} v(x = L, t) = Z v(x = L, t) \quad \forall t$$

On modifie donc la fonctionnelle en ajoutant le résidu relatif à la relation précédente :

$$\mathcal{J}_{liaison} = \frac{\gamma}{2} \int_0^T \left[Z^{-1/2} \sigma - Z^{1/2} v \right]_{(x=L)}^2 dt$$

ce qui a pour effet de modifier les dérivées du terme j^T et par conséquent les conditions aux limites en $x = L$. Pour la solution à $v(x = L, t) = v^d(x = L, t)$ imposée, $j_{,v}^T$ n'est pas modifiée (puisque $v = v^d$ est fixée) mais :

$$j_{,\sigma}^T \longrightarrow j_{,\sigma}^T + \gamma \left(\frac{\sigma}{Z} - v^d \right)$$

et réciproquement, lorsque l'on impose l'effort $\sigma(x = L, t) = \sigma^d(x = L, t)$, $j_{,\sigma}^T$ n'est pas modifiée (puisque $\sigma = \sigma^d$ est fixée) et :

$$j_{,v}^T \longrightarrow j_{,v}^T + \gamma (\sigma^d - Z v)$$

Pour l'écart quadratique, la condition en $x = L$ devient :

$$\hat{v} + \sigma - \sigma^d + \gamma \left(\frac{\sigma}{Z} - v^d \right) = 0$$

et pour l'écart en puissance on a :

$$\hat{v} = v^* - v^d + \gamma \left(\frac{\sigma}{Z} - v^d \right)$$

$$\hat{\sigma}^* = \sigma - \sigma^d + \gamma (\sigma^d - Z v)$$

de sorte que pour γ assez grand, c'est la condition de proportionnalité qui se trouve préférentiellement vérifiée (l'état adjoint, interprété comme une "force de rappel" vers cette condition, est alors de norme grande).

8.4.4 Comparaison des méthodes

On dispose de trois méthodes de calcul du gradient. L'avantage des deux premières est la facilité de mise en œuvre, puisqu'elles ne nécessitent pas le développement plus lourd imposé par la méthode de l'état adjoint. Cette dernière méthode est cependant compétitive au niveau du coût de l'évaluation du gradient.

Le bloc élémentaire de *calcul* consiste toujours en la résolution d'un problème direct du type (8.4), avec, selon les cas, des conditions aux limites homogènes ou non, un second membre plus ou moins compliqué et une propagation rétrograde en temps pour les calculs d'états adjoints. Le bloc élémentaire de *stockage* est celui d'un champ scalaire défini sur la grille formée par le réseau de caractéristiques dans le domaine $[0, L] \times [0, T]$. Ceci permet de comparer les coûts des différentes méthodes. Plaçons-nous pour fixer les idées dans le cas de la fonctionnelle quadratique, le volume de calcul étant simplement doublé dans le cas de l'écart en puissance (en effet, ce dernier fait intervenir les solutions (σ, ε, v) et $(\sigma^*, \varepsilon^*, v^*)$). De façon générale (Bonnet, Pilvin, Raynaud, Reynier [10]), on peut constater que :

- Pour les choix $\{p_i\} = \{p_i\}^{opt}$ et $[\psi] = -[H^{opt}]^{-1}$, la variation globale des Γ_i se réduit, car alors $\Gamma_i \equiv p_i$, aux relations suivantes :

$$\delta_{\sigma^d} \Gamma_i = \delta_{\sigma^d} p_i = \frac{\partial^2 \mathcal{J}}{\partial \sigma^d \partial p_j} \psi_{ji} \delta \sigma^d$$

$$\delta_{v^d} \Gamma_i = \delta_{v^d} p_i = \frac{\partial^2 \mathcal{J}}{\partial v^d \partial p_j} \psi_{ji} \delta v^d$$

relations qui donnent la variation des paramètres identifiés au minimum de \mathcal{J} en fonction de la variation des données v^d et σ^d .

Si l'on reprend par exemple la fonctionnelle d'écart en puissance, on avait au paragraphe précédent :

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \sigma^d} \delta \sigma^d = \langle \hat{v} ; \delta \sigma^d \rangle \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial v^d} \delta v^d = \langle \hat{\sigma}^* ; \delta v^d \rangle$$

soit

$$\frac{\partial^2 \mathcal{J}}{\partial \sigma^d \partial p_j} \delta \sigma^d = \left\langle \frac{\partial \hat{v}}{\partial p_j} ; \delta \sigma^d \right\rangle \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \mathcal{J}}{\partial v^d \partial p_j} \delta v^d = \left\langle \frac{\partial \hat{\sigma}^*}{\partial p_j} ; \delta v^d \right\rangle$$

où les champs $\frac{\partial \hat{v}}{\partial p_j}$ et $\frac{\partial \hat{\sigma}^*}{\partial p_j}$ sont issus d'un calcul du type "système dérivé" (8.6). L'expression analytique des variations des paramètres par rapport aux conditions aux limites au point d'identification est alors :

$$\delta_{\sigma^d} p_i = \langle -[H^{opt}]_{ji}^{-1} \cdot \frac{\partial \hat{v}}{\partial p_j} ; \delta \sigma^d \rangle \quad \text{et} \quad \delta_{v^d} p_i = \langle -[H^{opt}]_{ji}^{-1} \cdot \frac{\partial \hat{\sigma}^*}{\partial p_j} ; \delta v^d \rangle \quad (8.33)$$

dans lesquelles la matrice $[H^{opt}]$ est définie positive (minimum de \mathcal{J}) ce qui assure la *continuité* des paramètres identifiés par rapport aux conditions aux limites.

Prise en compte de données complémentaires

La prise en compte de données complémentaires est réalisée en modifiant la fonctionnelle. On envisage deux modifications du coût (section 6.5).

1. Les prises de vue réalisées durant un essai constituent une source d'information complémentaire. La fonctionnelle coût est modifiée par le terme supplémentaire :

$$\mathcal{J}_{cam} = \sum_i \frac{\beta}{2} \int_0^T \int_0^L [\varepsilon(x, t) - B(t - t_i) \varepsilon_i^d(x)]^2 dx dt$$

où les t_i sont les instants de prise de vue $\varepsilon_i^d(x)$ une estimation de la déformée à ces instants et $B(t)$ une fonction de pondération concentrée en $t = 0$. Cette fonction autorise une liberté sur l'instant de la prise de vue d'autant plus grande que $B(t)$ est étalée. Cette modification de la fonctionnelle entraîne une modification du terme $j_{,\varepsilon}^{\Omega T}$ dans le second membre de (8.12) :

$$j_{,\varepsilon}^{\Omega T} \longrightarrow j_{,\varepsilon}^{\Omega T} + \sum_i \beta (\varepsilon(x, t) - B(t - t_i) \varepsilon_i^d(x))$$

Plus β est grand, plus on donne de l'importance à l'information photographique. Si la fonction $B(t)$ est très concentrée (cas limite : fonction de Dirac), cela revient à imposer à la solution un *saut* aux instants t_i , ce qui est bien trop contraignant par rapport à la qualité relative de l'information. Le choix d'un $B(t)$ étalé permet de tempérer l'introduction des données supplémentaires.

où les ψ_{ij} sont des multiplicateurs. On écrit la différentielle globale de Γ_i :

$$\delta\Gamma_i = (\delta_{ij} + \frac{\partial^2 \mathcal{J}}{\partial p_j \partial p_k} \psi_{ki}) \delta p_j + \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial p_j} \delta \psi_{ji} + \frac{\partial^2 \mathcal{J}}{\partial \sigma^d \partial p_j} \psi_{ji} \delta \sigma^d + \frac{\partial^2 \mathcal{J}}{\partial v^d \partial p_j} \psi_{ji} \delta v^d \quad (8.29)$$

où $\{\delta_{ij}\}$ représente la matrice identité $[I]$. De cette définition il vient :

- Lorsque $\{p_i\} = \{p_i\}^{opt}$ on a l'identité :

$$\delta_{\psi_{ji}} \Gamma_i = \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial p_j} \delta \psi_{ji} \equiv 0$$

ce qui entraîne :

$$\Gamma_i \equiv p_i$$

- Le point précédent étant vérifié, on cherche à annuler la variation des Γ_i par rapport aux p_j . On pose pour cela :

$$H_{ij}^{opt} = \frac{\partial^2 \mathcal{J}}{\partial p_i \partial p_j} \Big|_{\{p_k\}=\{p_k\}^{opt}}$$

matrice hessienne de la fonctionnelle \mathcal{J} au minimum ; cette matrice est positive (minimum de \mathcal{J}). Il vient :

$$\delta_{p_j} \Gamma_i = (I_{ij} + H_{jk}^{opt} \psi_{ki}) \delta p_j$$

variation que l'on annule en choisissant la matrice $[\psi] = \{\psi_{ij}\}$ telle que :

$$[H^{opt}] \cdot [\psi] = -[I] \quad (8.30)$$

La matrice $[\psi]$ est correctement définie si la matrice hessienne de la fonctionnelle \mathcal{J} est inversible. Pour cela, aucune de ses valeurs propres ne doit être nulle. Dans le cas contraire, il existe un sous-espace propre de l'espace des paramètres dans lequel la variation de $\{p_i\}$ n'entraîne pas de variation de \mathcal{J} . Dans ce cas, on peut définir une "pseudo-inversion" obtenue en ajoutant à la fonctionnelle \mathcal{J} , un ϵ -terme quadratique dans chaque direction de base P du sous-espace en question :

$$\mathcal{J}^{nouveau} = \mathcal{J}^{ancien} + \epsilon \|P\|^2 \quad (8.31)$$

ce qui rend la fonctionnelle \mathcal{J} strictement convexe dans un voisinage de $\{p_i\}^{opt}$. L'équation (8.30) permet alors de définir $[\psi]$:

$$[\psi] = -[H^{opt}]^{-1} \quad (8.32)$$

Les éléments de la matrice $-\psi$ représentent la *sensibilité* de la fonctionnelle aux paramètres à l'optimum. Ses directions propres sont interprétées comme des directions préférentielles de couplage entre les paramètres et la valeur propre correspondante comme la sensibilité de la fonctionnelle dans cette direction préférentielle. Exemple : supposons $\{p_i\} = \{p_1, p_2, p_3, p_4\} \in \mathbb{R}^4$ et $(1, 3, 0, 0) \in \mathbb{R}^4$ vecteur propre de $[\psi]$; une variation $\delta\eta$ dans cette direction correspond à : $\{\delta p_1 \propto \delta\eta, \delta p_2 \propto 3\delta\eta, \delta p_3 = 0, \delta p_4 = 0\}$: il y a couplage entre p_1 et p_2 et découplage avec (p_3, p_4) .

Pour utiliser la fonctionnelle en puissance *intégrée en temps* (voir section 6.4.4) il suffit ici, et dans toute la suite, de multiplier formellement l'intégrande définissant \mathcal{J} par le facteur $(T - t)$. Les conditions aux limites de l'état adjoint deviennent par exemple simplement :

$$\begin{aligned}\hat{v} &= (T - t)(v^* - v^d) & \forall t, x = 0 \text{ et } x = L \\ \hat{\sigma}^* &= (T - t)(\sigma - \sigma^d) & \forall t, x = 0 \text{ et } x = L\end{aligned}$$

Facteurs de sensibilité

Les facteurs de sensibilité permettent de déterminer la sensibilité de la fonctionnelle \mathcal{J} aux conditions aux limites. On considère pour cela les données σ^d ou v^d comme des variables dans la fonctionnelle \mathcal{J} . On cherche donc l'expression de $\delta_{v^d, \sigma^d} \mathcal{J}$, pour les deux fonctionnelles présentées ci-dessus.

- Pour la fonctionnelle quadratique, on a :

$$\begin{aligned}\delta_{\sigma^d} \mathcal{J} &= \int_0^T (\underbrace{\sigma - \sigma^d}_{\hat{v}})(-\delta\sigma^d)|_{x=0} dt + \int_0^T (\underbrace{\sigma - \sigma^d}_{-\hat{v}})(-\delta\sigma^d)|_{x=L} dt = \int_0^T \hat{v} \delta\sigma^d|_0^L \\ \delta_{v^d} \mathcal{J} &= \int_0^T (\sigma - \sigma^d)(\delta_{v^d}\sigma)|_{x=0} dt + \int_0^T (\sigma - \sigma^d)(\delta_{v^d}\sigma)|_{x=L} dt = - \int_0^T \hat{v} \delta_{v^d}\sigma|_0^L\end{aligned}$$

Dans cette dernière expression, le champ $\delta_{v^d}\sigma$ est solution du problème (8.4) *linéarisé* au voisinage de la donnée aux limites v^d . L'application $A(v^d) : \delta v^d \mapsto \delta_{v^d}\sigma \equiv A(v^d) \cdot \delta v^d$ est donc linéaire en δv^d . En introduisant l'adjoint $A^*(v^d)$ de $A(v^d)$ par rapport au produit scalaire $L^2 : \langle u; v \rangle = \int_0^T u v|_0^L dt$, on peut finalement écrire :

$$\delta_{\sigma^d} \mathcal{J} = \langle \hat{v} ; \delta\sigma^d \rangle \quad \text{et} \quad \delta_{v^d} \mathcal{J} = \langle A^*(v^d) \cdot \hat{v} ; \delta v^d \rangle \quad (8.25)$$

- Pour l'écart en puissance, la différentiation directe de l'expression de \mathcal{J} donne, en tenant comme précédemment compte des conditions aux limites des états adjoints :

$$\delta_{\sigma^d} \mathcal{J} = \langle \hat{v} ; \delta\sigma^d \rangle \quad \text{et} \quad \delta_{v^d} \mathcal{J} = \langle \hat{\sigma}^* ; \delta v^d \rangle \quad (8.26)$$

Les relations (8.25, 8.26) permettent d'interpréter les champs adjoints comme les facteurs de sensibilité de la variation de \mathcal{J} lorsque les données aux limites varient.

Effets d'une variation des données

L'interprétation des champs adjoints que l'on vient de donner va maintenant servir à déterminer l'influence des conditions aux limites non plus sur la valeur de la fonctionnelle \mathcal{J} mais sur le jeu de paramètres optimaux obtenus en minimisant \mathcal{J} .

On se place donc implicitement sur le jeu de paramètres $\{p_i\} = \{p_i\}^{opt}$ qui minimise \mathcal{J} pour un couple (v^d, σ^d) donné ; on a donc :

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial p_i}(\sigma^d, v^d, p_j = p_j^{opt}) = 0 \quad \text{pour} \quad i = 1..np \quad (8.27)$$

où l'on a omis les autres champs dont dépend \mathcal{J} . Cette équation définit ainsi $\{p_i\}^{opt}$ comme fonctionnelle implicite des conditions (v^d, σ^d) . On introduit alors les np fonctionnelles suivantes :

$$\Gamma_i(\{p_i\}, \sigma^d, v^d, \psi_{ij}) \Big|_{\substack{i = 1..np \\ j = 1..np}} = p_i + \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial p_j} \cdot \psi_{ji} \quad (8.28)$$

ce qui permet, avec (8.14), d'écrire les conditions aux limites du problème adjoint :

$$\text{en } x = 0 : \quad \hat{v} - \sigma + \sigma^d = 0$$

$$\text{en } x = L : \quad \hat{v} + \sigma - \sigma^d = 0$$

La condition aux limites du problème adjoint correspond à l'écart du problème direct avec les données expérimentales.

3. les conditions finales à $t = T$ et $\forall x$ sont homogènes :

$$\hat{v} \equiv 0, \quad \hat{\sigma} \equiv 0, \quad \hat{e} \equiv 0, \quad \forall t \geq T$$

Ecart en puissance

Toujours d'après la section 6.4.2, cet écart s'exprime par :

$$\mathcal{J} = \int_0^T \Delta v \Delta \sigma|_0^L dt$$

On choisit de prendre, comme couple de problèmes directs, un premier à vitesses imposées et un second à efforts imposés (conditions expérimentales duales, solution "étoilée"). Ce choix conduit à l'expression explicite suivante de \mathcal{J} :

$$\mathcal{J} = \int_0^T (v^* - v^d)(\sigma^d - \sigma)|_0^L dt$$

On a ici deux problèmes adjoints à résoudre. Les équations d'évolution qui les régissent sont similaires au système (8.24) et les conditions finales sont aussi homogènes, pour les deux états adjoints. De façon générale, lorsque la fonctionnelle coût ne porte que sur la frontière (somme en temps sur celle-ci) les conditions finales des états adjoints sont homogènes et l'évolution est donnée par le système (8.24). Les conditions aux limites sont en revanche différentes. On choisit la formulation faible (dans \mathcal{L}) pour les conditions aux limites de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \int_0^T \delta CL \cdot \widehat{CL}|_0^L dt &= \int_0^T \delta(v - v^d)(-\hat{\sigma})|_0^L dt \\ \int_0^T \delta CL^* \cdot \widehat{CL^*}|_0^L dt &= \int_0^T \delta(\sigma^* - \sigma^d)(-\hat{v}^*)|_0^L dt \end{aligned}$$

ce qui permet d'écrire, grâce à (8.14) et (8.15) :

$$\hat{v} = v^* - v^d \quad \forall t, x = 0 \text{ et } x = L$$

$$\hat{\sigma}^* = \sigma - \sigma^d \quad \forall t, x = 0 \text{ et } x = L$$

On remarque que les conditions aux limites respectives des problèmes adjoints sont de même nature que celles des problèmes directs correspondants : ceci provient du fait que la dimension de l'écart est une *énergie*. Ils s'expriment comme précédemment par une différence entre un état calculé et les quantités données : on conçoit que plus cet écart est important, plus l'"énergie" de l'état adjoint est élevée et la simulation est dans ce cas loin de l'expérience ; lorsque les paramètres du comportement décrivent correctement les données expérimentales, cette "énergie" de l'état adjoint devient faible. D'autre part, on note que ce sont les conditions aux limites qui couplent les deux problèmes adjoints.

dont les dérivées par rapport aux champs sont :

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial \sigma} &= \left(1 + \frac{E_t}{E}\right) \frac{m}{\eta} <|u| - \sigma_y >^{m-1} \\ \frac{\partial g}{\partial \varepsilon} &= -\frac{E_t m}{\eta} <|u| - \sigma_y >^{m-1}\end{aligned}\quad (8.21)$$

et dont les dérivées par rapport aux paramètres sont :

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial E} &= -\frac{\sigma}{E^2} \frac{E_t m}{\eta} <|u| - \sigma_y >^{m-1} \\ \frac{\partial g}{\partial E_t} &= \left(\frac{\sigma}{E} - \varepsilon\right) \frac{m}{\eta} <|u| - \sigma_y >^{m-1} \\ \frac{\partial g}{\partial \eta} &= -\frac{g}{\eta} \\ \frac{\partial g}{\partial \sigma_y} &= -\frac{m}{\eta} \operatorname{sgn}(u) <|u| - \sigma_y >^{m-1} \\ \frac{\partial g}{\partial m} &= \frac{\operatorname{sgn}(u)}{\eta} <|u| - \sigma_y >^m \log(<|u| - \sigma_y >)\end{aligned}\quad (8.22)$$

où, pour des raisons de continuité (lorsque $m \rightarrow 1^+$), on pose $<x>^0 \equiv H(x)$ (fonction de Heavyside). Ces fonctions dérivées sont *continues* par rapport aux champs σ et ε , sauf dans le cas $m = 1$ où elles présentent un saut. Celui-ci n'est cependant pas gênant puisque ces dérivées n'interviennent que dans les convolutions (8.19, 8.20).

On explicite à présent l'état adjoint pour les fonctionnelles qui seront utilisées au chapitre suivant dans les exemples numériques. Les conditions aux limites données (expérimentales) sont repérées par l'exposant d .

Ecart quadratique en effort

Cet écart s'exprime, d'après la section 6.4.2 par :

$$\mathcal{J} = \int_0^T \frac{1}{2} [\sigma - \sigma^d]_{x=0}^2 dt + \int_0^T \frac{1}{2} [\sigma - \sigma^d]_{x=L}^2 dt \quad (8.23)$$

dans lequel le champ σ est solution du système (8.4) pour lequel les conditions aux limites sont des vitesses imposées sur les deux extrémités de l'échantillon. Un seul calcul d'état adjoint est donc nécessaire et consiste à résoudre le système :

1. équations d'évolution sur $[0, L] \times [0, T]$:

$$\begin{cases} \hat{\sigma}_{,x} - \rho \hat{v}_{,t} = 0 \\ \hat{v}_{,x} - \frac{1}{E} \hat{\sigma}_{,t} = -\hat{e}(g, \sigma + \frac{1}{E} g, \varepsilon) \\ \hat{e}_{,t} - \hat{\sigma}_{,t} = -\hat{e} g, \varepsilon \end{cases} \quad (8.24)$$

2. conditions aux limites en $x = 0$ et $x = L$, $\forall t$: on choisit dans l'expression du Lagrangien la formulation faible suivante pour les conditions aux limites :

$$\int_0^T \delta CL \cdot \widehat{CL}|_0^L dt = \int_0^T \delta(v - v^d)(-\hat{\sigma})|_0^L dt$$

Si donc on suppose que (σ, v, ε) et $(\sigma^*, v^*, \varepsilon^*)$ sont solutions du problème d'évolution (8.4), que l'état adjoint vérifie les points 1., 2., 3. ci-dessus, la variation du Lagrangien se réduit au terme C de la relation (8.9) :

$$\delta_{\{p_i\}} \mathcal{L} = \delta_{\{p_i\}} \mathcal{J} = \nabla_{\{p_i\}} \mathcal{J} \cdot \delta \{p_i\} \quad (8.18)$$

qui fournit une expression analytique du gradient de la fonctionnelle implicite \mathcal{J} . Les paramètres n'intervenant pas explicitement dans \mathcal{J} la dérivation de \mathcal{L} par rapport à ceux-ci conduit à :

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial E} = \int_0^L \int_0^T \left[\frac{1}{E^2} \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial E} \right] \hat{e} \, dx \, dt + \int_0^L \int_0^T \left[\frac{1}{E^2} \frac{\partial \sigma^*}{\partial t} - \frac{\partial g^*}{\partial E} \right] \hat{e}^* \, dx \, dt \quad (8.19)$$

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial p_i} = \int_0^L \int_0^T \left[-\frac{\partial g}{\partial p_i} \right] \hat{e} \, dx \, dt + \int_0^L \int_0^T \left[-\frac{\partial g^*}{\partial p_i} \right] \hat{e}^* \, dx \, dt \quad (p_i \neq E) \quad (8.20)$$

où, pour mémoire, $g = g(\sigma, \varepsilon, \{p_i\})$ et $g^* = g(\sigma^*, \varepsilon^*, \{p_i\})$. Le gradient de \mathcal{J} par rapport aux paramètres s'exprime comme une intégrale en espace et en temps du produit d'un champ qui n'est fonction que de la solution (σ, v, ε) ou $(\sigma^*, v^*, \varepsilon^*)$ du problème direct (entre crochets) et des champs "de déformation" \hat{e} ou \hat{e}^* relatifs aux états adjoints. Cette intégrale n'est donc autre qu'une *convolution* (spatio-temporelle) de la solution du problème direct avec l'état adjoint pour les variables transformées $t \rightarrow (T - t)$ et $x \rightarrow (L - x)$.

Cette remarque entraîne la conséquence pratique suivante : l'état adjoint dépendant du problème d'évolution et étant rétrograde en temps, cette convolution ne peut être évaluée qu'après avoir calculé et stocké (en pratique !) la *totalité* des solutions des problèmes directs.

En contrepartie, une fois les champs et les champs adjoints connus, le nombre de paramètres décrivant le comportement n'intervient que par le nombre de convolutions dans le coût du calcul du gradient.

On choisira dans la suite la fonction $g(\sigma, \varepsilon, \{p_i\})$ associée au modèle élasto-visco-plastique linéaire déjà présenté à la section 7.2.2 :

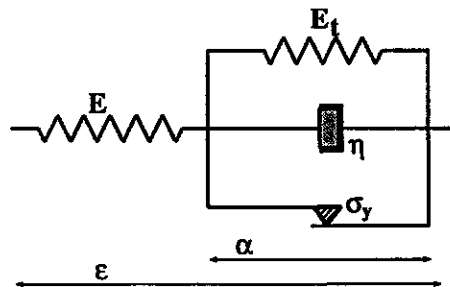


Figure 8.1 : Modèle élasto-visco-plastique

Ce modèle permet de décrire une assez grande diversité de comportements selon le jeu de paramètres choisi. Pour ce modèle de type Sokolowsky-Malvern la fonction g est ($m \geq 1$, $\langle x \rangle = \frac{1}{2}(|x| + x)$ représente la partie positive de x) :

$$g(\sigma, \varepsilon, E, E_t, \eta, \sigma_y, m) = \frac{1}{\eta} \langle |u| - \sigma_y \rangle^m \operatorname{sgn}(u) \quad \text{en posant} \quad u = \left(1 + \frac{E_t}{E}\right) \sigma - E_t \varepsilon$$

Dans cette intégration par parties on a utilisé le fait que :

- \mathcal{J}^Ω et $\mathcal{J}^{\Omega T}$ sont fonctionnelles de $\sigma, v, \varepsilon, \sigma^*, v^*, \varepsilon^*$ tandis que \mathcal{J}^T n'est fonctionnelle que des champs σ, v, σ^*, v^* (la déformation n'intervenant pas sur le bord $x = 0, x = L$).
- les éléments variationnels $\delta\sigma, \delta\varepsilon, \delta v, \delta\sigma^*, \delta\varepsilon^*, \delta v^*$ sont identiquement nuls à $t = 0$ et $\forall x$ puisque les conditions initiales des problèmes directs primal et dual sont par hypothèse fixées.

L'équation (8.11) permet ainsi de formuler le système d'équations vérifiées par les états adjoints, *couplés* par la présence, au second membre, des différentielles de \mathcal{J} , fonctionnelles des champs (σ, v, ε) et $(\sigma^*, v^*, \varepsilon^*)$:

1. équations d'évolution sur $[0, L] \times [0, T]$:

$$\begin{cases} \hat{\sigma}_{,x} - \rho \hat{v}_{,t} = j_{,v}^{\Omega T} \\ \hat{v}_{,x} - \frac{1}{E} \hat{\sigma}_{,t} = j_{,\sigma}^{\Omega T} - \hat{e} g_{,\sigma} + \frac{1}{E} (j_{,\varepsilon}^{\Omega T} - \hat{e} g_{,\varepsilon}) \\ \hat{e}_{,t} - \hat{\sigma}_{,t} = j_{,\varepsilon}^{\Omega T} - \hat{e} g_{,\varepsilon} \end{cases} \quad (8.12)$$

$$\begin{cases} \hat{\sigma}^*_{,x} - \rho \hat{v}^*_{,t} = j_{,v^*}^{\Omega T} \\ \hat{v}^*_{,x} - \frac{1}{E} \hat{\sigma}^*_{,t} = j_{,\sigma^*}^{\Omega T} - \hat{e}^* g_{,\sigma^*} + \frac{1}{E} (j_{,\varepsilon^*}^{\Omega T} - \hat{e}^* g_{,\varepsilon^*}) \\ \hat{e}^*_{,t} - \hat{\sigma}^*_{,t} = j_{,\varepsilon^*}^{\Omega T} - \hat{e}^* g_{,\varepsilon^*} \end{cases} \quad (8.13)$$

2. conditions aux limites en $x = 0$ et $x = L, \forall t$:

$$\delta v (\hat{\sigma} + j_{,v}^T) + \delta \sigma (\hat{v} + j_{,\sigma}^T) + \delta CL \cdot \widehat{CL} = 0 \quad \forall \delta v, \delta \sigma \quad (8.14)$$

$$\delta v^* (\hat{\sigma}^* + j_{,v^*}^T) + \delta \sigma^* (\hat{v}^* + j_{,\sigma^*}^T) + \delta CL^* \cdot \widehat{CL}^* = 0 \quad \forall \delta v^*, \delta \sigma^* \quad (8.15)$$

3. conditions finales à $t = T$ et $\forall x$:

$$\begin{cases} \hat{v} = \frac{1}{\rho} j_{,v}^\Omega \\ \hat{e} = E j_{,\sigma}^\Omega \\ \hat{\sigma} = E j_{,\sigma}^\Omega + j_{,\varepsilon}^\Omega \end{cases} \quad (8.16)$$

$$\begin{cases} \hat{v}^* = \frac{1}{\rho} j_{,v^*}^\Omega \\ \hat{e}^* = E j_{,\sigma^*}^\Omega \\ \hat{\sigma}^* = E j_{,\sigma^*}^\Omega + j_{,\varepsilon^*}^\Omega \end{cases} \quad (8.17)$$

Les équations de chacun des problèmes adjoints constituent des systèmes d'évolution qui reposent sur le même opérateur différentiel que le problème direct. Elles sont *rétrogrades en temps*, mais conduisent à des problèmes *bien posés*, en tant que système d'équations des ondes. En effet, si l'on fait le changement de variables $t \rightarrow (T - t)$ et $x \rightarrow (L - x)$, on constate que l'état adjoint, pour ces nouvelles variables, s'écrit de la même façon qu'un problème direct sur $[0, T]$, de conditions aux limites et d'état initial donnés.

$$\begin{aligned}
& + \delta_{\sigma^*, \varepsilon^*, v^*} \mathcal{J} \\
& + \int_0^T \int_0^L (\delta \sigma_{,x}^* - \rho \delta v_{,t}^*) \hat{v}^* dx dt \\
& + \int_0^T \int_0^L \left(\delta \varepsilon_{,t}^* - \frac{1}{E} \delta \sigma_{,t}^* - \delta g(\sigma^*, \varepsilon^*) \right) \hat{e}^* dx dt \\
& + \int_0^T \int_0^L (\delta v_{,x}^* - \delta \varepsilon_{,t}^*) \hat{\sigma}^* dx dt \\
& - \int_0^T \delta CL^* \cdot \widehat{CL}^*|_0^L dt \\
& \equiv 0
\end{aligned} \tag{8.10}$$

Une intégration par parties en espace ou en temps permet de reporter les dérivations sur les champs adjoints :

$$\begin{aligned}
\delta_{\sigma, \varepsilon, v, \sigma^*, \varepsilon^*, v^*} \mathcal{L} = & \int_0^L \int_0^T j_{,v}^{\Omega T} \delta v + j_{,\sigma}^{\Omega T} \delta \sigma + j_{,\varepsilon}^{\Omega T} \delta \varepsilon dt dx \\
& - \int_0^T \int_0^L (\hat{\sigma}_{,x} - \rho \hat{v}_{,t}) \delta v dx dt \\
& - \int_0^T \int_0^L \left(\hat{v}_{,x} - \frac{1}{E} \hat{e}_{,t} + g_{,\sigma} \hat{e} \right) \delta \sigma dx dt \\
& - \int_0^T \int_0^L (\hat{e}_{,t} - \hat{\sigma}_{,t} + g_{,\varepsilon} \hat{e}) \delta \varepsilon dx dt \\
& + \int_0^T \delta CL \cdot \widehat{CL}|_0^L dt \\
& + \int_0^T \hat{\sigma} \delta v + \hat{v} \delta \sigma|_0^L dt + \int_0^T j_{,v}^T \delta v + j_{,\sigma}^T \delta \sigma|_0^L dt \\
& + \int_0^L j_{,v}^{\Omega} \delta v + j_{,\sigma}^{\Omega} \delta \sigma + j_{,\varepsilon}^{\Omega} \delta \varepsilon|_T dx \\
& - \int_0^L \left[\rho \hat{v} \delta v + \frac{1}{E} \hat{e} \delta \sigma + (\hat{\sigma} - \hat{e}) \delta \varepsilon \right]_T dx \\
& + \int_0^L \int_0^T j_{,v^*}^{\Omega T} \delta v^* + j_{,\sigma^*}^{\Omega T} \delta \sigma^* + j_{,\varepsilon^*}^{\Omega T} \delta \varepsilon^* dt dx \\
& - \int_0^T \int_0^L (\hat{\sigma}_{,x}^* - \rho \hat{v}_{,t}^*) \delta v^* dx dt \\
& - \int_0^T \int_0^L \left(\hat{v}_{,x}^* - \frac{1}{E} \hat{e}_{,t}^* + g_{,\sigma^*} \hat{e}^* \right) \delta \sigma^* dx dt \\
& - \int_0^T \int_0^L (\hat{e}_{,t}^* - \hat{\sigma}_{,t}^* + g_{,\varepsilon^*} \hat{e}^*) \delta \varepsilon^* dx dt \\
& + \int_0^T \delta CL^* \cdot \widehat{CL}^*|_0^L dt \\
& + \int_0^T \hat{\sigma}^* \delta v^* + \hat{v}^* \delta \sigma^*|_0^L dt + \int_0^T j_{,v^*}^T \delta v^* + j_{,\sigma^*}^T \delta \sigma^*|_0^L dt \\
& + \int_0^L j_{,v^*}^{\Omega} \delta v^* + j_{,\sigma^*}^{\Omega} \delta \sigma^* + j_{,\varepsilon^*}^{\Omega} \delta \varepsilon^*|_T dx \\
& - \int_0^L \left[\rho \hat{v}^* \delta v^* + \frac{1}{E} \hat{e}^* \delta \sigma^* + (\hat{\sigma}^* - \hat{e}^*) \delta \varepsilon^* \right]_T dx
\end{aligned} \tag{8.11}$$

naturellement à l'introduction d'un Lagrangien \mathcal{L} qui augmente la fonctionnelle d'écart \mathcal{J} de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(\{p_i\}, \sigma, \varepsilon, v, \sigma^*, \varepsilon^*, v^*, \hat{\sigma}, \hat{\varepsilon}, \hat{v}, \hat{\sigma}^*, \hat{\varepsilon}^*, \hat{v}^*) &= \mathcal{J}(\{p_i\}, \sigma, \varepsilon, v, \sigma^*, \varepsilon^*, v^*) \\
 &+ \int_0^T \int_0^L \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} - \rho \frac{\partial v}{\partial t} \right) \hat{v} \, dx dt \\
 &+ \int_0^T \int_0^L \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma}{\partial t} - g(\sigma, \varepsilon; \{p_i\}) \right) \hat{\varepsilon} \, dx dt \\
 &+ \int_0^T \int_0^L \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right) \hat{\sigma} \, dx dt \\
 &- \int_0^T CL \cdot \widehat{CL}|_0^L dt \\
 &+ \int_0^T \int_0^L \left(\frac{\partial \sigma^*}{\partial x} - \rho \frac{\partial v^*}{\partial t} \right) \hat{v}^* \, dx dt \\
 &+ \int_0^T \int_0^L \left(\frac{\partial v^*}{\partial x} - \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma^*}{\partial t} - g(\sigma^*, \varepsilon^*; \{p_i\}) \right) \hat{\varepsilon}^* \, dx dt \\
 &+ \int_0^T \int_0^L \left(\frac{\partial v^*}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial t} \right) \hat{\sigma}^* \, dx dt \\
 &- \int_0^T CL^* \cdot \widehat{CL}^*|_0^L dt
 \end{aligned} \tag{8.8}$$

dans lequel les champs adjoints sont les champs "chapeau", $\hat{\sigma}$, $\hat{\varepsilon}$ et \hat{v} pour la solution S , et les champs "chapeau-étoile" $\hat{\sigma}^*$, $\hat{\varepsilon}^*$ et \hat{v}^* pour la solution S^* . Pour l'instant, on ne fixe pas les conditions aux limites "chapeau" et "chapeau-étoile" puisque ce sont ces conditions aux limites qui, dans la suite, permettent de "bien" définir les états adjoints.

On note $\delta_{a,b,\dots} F = (\partial F / \partial a) \delta a + (\partial F / \partial b) \delta b + \dots$ la différentielle globale d'une fonctionnelle F . La différentielle globale du Lagrangien s'écrit donc :

$$\delta \mathcal{L} = \underbrace{\delta_{\sigma, \varepsilon, v, \sigma^*, \varepsilon^*, v^*} \mathcal{L}}_A + \underbrace{\delta_{\hat{\sigma}, \hat{\varepsilon}, \hat{v}, \hat{\sigma}^*, \hat{\varepsilon}^*, \hat{v}^*} \mathcal{L}}_B + \underbrace{\delta_{\{p_i\}} \mathcal{L}}_C \tag{8.9}$$

Le terme B n'est autre que la formulation *faible* du système (8.4), il est par conséquent *nul* dès que l'on se place sur des solutions (σ, ε, v) et $(\sigma^*, \varepsilon^*, v^*)$ du problème direct. L'annulation du terme A constitue la *définition* des états adjoints. Cette condition de stationnarité du Lagrangien \mathcal{L} par rapport aux champs σ , ε , v et σ^* , ε^* , v^* s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \delta_{\sigma, \varepsilon, v, \sigma^*, \varepsilon^*, v^*} \mathcal{L} &= \delta_{\sigma, \varepsilon, v} \mathcal{J} \\
 &+ \int_0^T \int_0^L (\delta \sigma_{,x} - \rho \delta v_{,t}) \hat{v} \, dx dt \\
 &+ \int_0^T \int_0^L \left(\delta \varepsilon_{,t} - \frac{1}{E} \delta \sigma_{,t} - \delta g(\sigma, \varepsilon) \right) \hat{\varepsilon} \, dx dt \\
 &+ \int_0^T \int_0^L (\delta v_{,x} - \delta \varepsilon_{,t}) \hat{\sigma} \, dx dt \\
 &- \int_0^T \delta CL \cdot \widehat{CL}|_0^L dt
 \end{aligned}$$

où j représente l'une des densités de la relation (8.1) et s la variable d'intégration de cette densité. Cette expression fait intervenir les champs $\partial\sigma/\partial p_i$, $\partial\varepsilon/\partial p_i$, $\partial v/\partial p_i$, solutions du problème (8.4) "dérivé" :

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l}
 \text{dans }]0, L[\times]0, T[: \\
 \\
 \\
 \text{sur } \{0, L\} \times]0, T[:
 \end{array} \right\} \begin{array}{l}
 \begin{cases} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial p_i} - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial p_i} = 0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial p_i} - \frac{1}{E} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t \partial p_i} = S_i \\ \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t \partial p_i} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial p_i} \end{cases} \\
 \\
 \\
 \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial p_i} = 0 \\ \text{ou} \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_i} = 0 \end{cases} \quad i = 1, \dots, np
 \end{array}
 \end{array}$$

$$S_i = \frac{\partial g}{\partial p_i}(\sigma, \varepsilon, \{p_j\}) + \frac{\partial g}{\partial \sigma}(\sigma, \varepsilon, \{p_j\}) \frac{\partial \sigma}{\partial p_i} + \frac{\partial g}{\partial \varepsilon}(\sigma, \varepsilon, \{p_j\}) \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_i} \quad (8.6)$$

Le coût pour obtenir le gradient est de np résolutions du type (8.6), problème en tout point similaire au problème (8.4). On note cependant que les conditions aux limites sont homogènes et que le second membre S_i dépend de la solution (σ, ε, v) .

8.4.3 Gradient évalué par état adjoint

La méthode de l'état adjoint permet d'exprimer de façon analytique le gradient de la fonctionnelle par rapport aux paramètres du comportement grâce à l'introduction de champs auxiliaires, puisque la dépendance de \mathcal{J} n'est, par rapport à ces paramètres, pas explicite.

On note dans la suite CL les conditions aux limites du problème direct et CL^* celles du problème aux limites dual (si CL représente une vitesse CL^* est un effort et vice versa). Comme précédemment, on écrit \mathcal{J} sous la forme :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J} &= \mathcal{J}^T + \mathcal{J}^\Omega + \mathcal{J}^{\Omega T} \\
 &= \int_0^T j^T|_0^L dt + \int_0^L j^\Omega|_T dx + \int_0^L \int_0^T j^{\Omega T} dt dx \quad (8.7)
 \end{aligned}$$

La dérivation de \mathcal{J} par rapport aux paramètres du comportement $\{p_i\}$ doit bien entendu se faire sur la variété des champs solutions du problème direct ce qui revient à une dérivation sous la contrainte " σ, ε, v solution du problème direct (8.4)". Dans le cas le plus général, la fonctionnelle dépend à la fois de la solution S du problème primal, dont les champs sont notés σ, ε, v et du problème dual, dont la solution S^* est $\sigma^*, \varepsilon^*, v^*$. La remarque qui précède s'applique donc à l'ensemble de ces deux solutions. La présence de cette contrainte conduit

8.4 Evaluation du gradient de la fonctionnelle coût

Le gradient de la fonction coût nécessité par les méthodes de descente peut s'obtenir de différentes manières. Gardons aussi à l'esprit que généralement, hormis à la fin du processus de minimisation, l'algorithme de descente nécessite plutôt une *estimation* du gradient qu'une détermination précise de celui-ci (une connaissance précise n'est, en effet, requise que pour le test d'arrêt de l'algorithme, lorsque l'on approche le minimum où la norme du gradient doit être "petite"). Trois façons de calculer ce gradient sont développées ici et leurs coûts en termes de temps de calcul comparés.

On se place dans le cadre défini section 7.2 avec un comportement de type Sokolowski-Malvern (Malvern [74]). Les équations du problème d'évolution sont données par le système (7.5) que l'on rappelle ici ($h = 0$, pas de paramètre α) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{dans }]0, L[\times]0, T[: \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \rho \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma}{\partial t} = g(\sigma, \varepsilon, \{p_i\}) \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x} \end{array} \right. \\ \\ \text{dans }]0, L[\times \{t, t \leq 0\} : \quad \sigma = 0, \varepsilon = 0, v = 0 \\ \\ \text{sur } \{0, L\} \times]0, T[: \quad \left\{ \begin{array}{l} v = v^d \\ \text{ou} \\ \sigma = \sigma^d \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (8.4)$$

8.4.1 Gradient évalué par différences finies

L'évaluation du gradient de la fonctionnelle coût par différences finies consiste, pour un jeu de paramètre donné, à suivre la variation de la fonctionnelle pour une petite variation d'un paramètre (i), les autres np restant fixés (np est le nombre de paramètres). On a alors simplement l'approximation suivante du gradient :

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial p_i} \simeq \frac{1}{\delta p_i} (\mathcal{J}(p_1, p_2, \dots, p_i + \delta p_i, \dots) - \mathcal{J}(p_1, p_2, \dots, p_i, \dots)) \quad i = 1, \dots, np$$

On note que le coût d'un tel calcul est de $(np+1)$ calculs directs. En contrepartie, cette approche est immédiate à mettre en œuvre puisqu'elle ne nécessite pas de module de calcul particulier.

8.4.2 Gradient évalué par différentiation directe

Le principe de la différentiation directe repose sur le calcul des solutions du problème direct d'évolution (8.4) "dérivées par rapport aux paramètres", puisqu'une différentiation directe de $\mathcal{J}(\sigma, \varepsilon, v)$ conduit à :

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial p_i} = \int_s \frac{\partial j}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial p_i} ds + \int_s \frac{\partial j}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_i} ds + \int_s \frac{\partial j}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial p_i} ds \quad (8.5)$$

- le choix $v = w_k$ conduit à la correction BFGS (Broyden, Fletcher, Goldfarb, Shanno) où :

$$H_{k+1} = \left(I - \frac{1}{u_k \cdot w_k} u_k \otimes w_k \right) \cdot H_k \cdot \left(I - \frac{1}{u_k \cdot w_k} w_k \otimes u_k \right) + \frac{1}{u_k \cdot w_k} u_k \otimes u_k$$

La différence entre ces corrections est la suivante :

$$H_{k+1}^{\text{BFGS}} = H_{k+1}^{\text{DFP}} + d_k \otimes d_k$$

avec :

$$d_k = (w_k \cdot H_k \cdot w_k)^{1/2} \left[\frac{1}{u_k \cdot w_k} u_k - \frac{1}{w_k \cdot H_k \cdot w_k} (H_k \cdot w_k) \right]$$

et s'exprime naturellement comme un produit tensoriel $d_k \otimes d_k$ avec d vecteur orthogonal à w_k .

On peut noter que pour ces deux schémas, si la fonction F est *quadratique*, on obtient l'inverse A^{-1} du hessien en n itérations exactement (Fletcher [38]) (n : nombre de variables). L'implémentation de chacune de ces deux méthodes est identique. La formule BFGS est généralement considérée comme un peu plus performante en pratique (Fletcher [38]).

8.3.2 Méthode de minimisation unidimensionnelle, ou “line search”

On s'intéresse à la minimisation de $f(x) = F(p^{(k)} + xg^{(k)})$. La résolution “précise” de ce problème n'est ici pas nécessaire, puisque l'information sur la fonction F sera augmentée au pas $k+1$ (meilleur hessien) : on cherche donc x tel que la décroissance de f soit au moins ρ fois la décroissance initiale ($1 > \rho > 0$, fixé assez petit) :

$$f(x) \leq f(0) + \rho x (\nabla F_k \cdot g^{(k)}) \quad (8.3)$$

c'est à dire :

$$f(x) \leq f(0) - \rho x (\nabla F_k \cdot H_k \cdot \nabla F_k)$$

puisque l'on prend l'incrément de Newton $g^{(k)} = -H_k \cdot \nabla F_k$ comme direction initiale. Le premier pas est le pas de Newton $x = 1$. S'il ne satisfait pas la condition (8.3), on connaît $f(0)$, $f(1)$ et $f'(0) = \nabla F_k \cdot g^{(k)} = -\nabla F_k \cdot H_k \cdot \nabla F_k \leq 0$ ce qui permet de donner une approximation quadratique de f :

$$f(x) \simeq [f(1) - f(0) - f'(0)]x^2 + f'(0)x + f(0)$$

dont le minimum est obtenu pour :

$$x_1 = -\frac{f'(0)}{2[f(1) - f(0) - f'(0)]}$$

Si la valeur de $f(x_1)$ ne satisfait pas (8.3), on construit une suite d'approximations cubiques à partir de $f(0)$, $f'(0)$ et les deux derniers couples calculés $(x_j, f(x_j))$ et $(x_{j+1}, f(x_{j+1}))$:

$$f(x) \simeq Ax^3 + Bx^2 + f'(0)x + f(0)$$

avec :

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \frac{1}{x_j - x_{j+1}} \begin{bmatrix} 1/x_j^2 & -1/x_{j+1}^2 \\ -x_{j+1}/x_j^2 & x_j/x_{j+1}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f(x_j) & - & f'(0)x_j & - & f(0) \\ f(x_{j+1}) & - & f'(0)x_{j+1} & - & f(0) \end{bmatrix}$$

dont le minimum est atteint pour :

$$x_{j+2} = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 3Af'(0)}}{3A}$$

Dans la pratique, on ajoute la condition $x \geq x_{\min}$ de façon à obtenir en un nombre d'itérations limité une valeur de x acceptable. En effet, une valeur trop faible de x après la $k^{\text{ième}}$ étape de BFGS conduit grosso-modo à la recherche d'un minimum dans la même direction dans le *line-search* de la $(k+1)^{\text{ième}}$ étape.

inverse H_k (à la $k^{\text{ième}}$ étape), est construit de la façon suivante : plaçons nous à la $k^{\text{ième}}$ itération ; le point $p^{(k+1)}$ est obtenu en minimisant la fonction F dans la direction $g^{(k)} = -H_k \cdot \nabla F_k$ en partant du point $p^{(k)}$ (on note $\nabla F_k = \nabla F(p^{(k)})$). La variation entre $p^{(k+1)}$ et $p^{(k)}$ du gradient de F s'écrit donc (au premier ordre en $p^{(k+1)} - p^{(k)}$) :

$$\nabla F_{k+1} - \nabla F_k = (H_{k+1})^{-1} \cdot (p^{(k+1)} - p^{(k)})$$

puisque $(H_{k+1})^{-1}$ est le gradient de ∇F au point $p^{(k+1)}$ et l'écart (relatif) entre deux estimations successives $p^{(k)}$ et $p^{(k+1)}$ est supposé (relativement) faible. C'est pour cette dernière raison que l'on cherche l'approximation H_{k+1} du hessien $(k+1)^{\text{ième}}$ étape sous la forme $H_{k+1} = H_k + \Delta H$. On a donc :

$$\Delta H \cdot w_k = u_k - H_k \cdot w_k$$

en notant :

$$u_k = p^{(k+1)} - p^{(k)} \quad \text{et} \quad w_k = \nabla F_{k+1} - \nabla F_k$$

ce qui amène à chercher dans un premier temps ΔH sous la forme (\otimes désignant le produit tensoriel) :

$$\Delta H = \frac{1}{v \cdot w_k} (u_k - H_k \cdot w_k) \otimes v \quad (8.2)$$

pourvu que le vecteur v soit non orthogonal à w_k . Cette correction est simple mais a pour défaut de ne pas conserver le caractère défini positif du hessien et elle n'est généralement pas symétrique, sauf bien entendu pour le choix $v = u_k - H_k \cdot w_k$ s'il est possible. L'idée consiste alors, à partir de cette correction, de passer de H_k à H_{k+1} de manière itérative :

$$\left| \begin{array}{lcl} H_k^0 & = & H_k \\ H_k^{j+1} & = & H_k^j + \frac{1}{2 v \cdot w_k} [(u_k - H_k^j \cdot w_k) \otimes v + v \otimes (u_k - H_k^j \cdot w_k)] \\ H_{k+1} & = & \lim_{j \rightarrow \infty} H_k^j \end{array} \right.$$

Cette suite est convergente et assure la symétrie du hessien à chaque étape. L'algorithme ainsi obtenu est dit "de rang 2" (Broyden [16], [17]) (contrairement à la correction simple présentée plus haut (8.2) qui est "de rang 1") puisque la correction agit sur la direction $u_k - H_k^j \cdot w_k$ utilisée dans le terme correctif de H_k^j . On montre que la limite de la suite H_k^j vérifie :

$$H_{k+1} = H_k + \frac{1}{v \cdot w_k} [(u_k - H_k \cdot w_k) \otimes v + v \otimes (u_k - H_k \cdot w_k)] - \frac{(u_k - H_k \cdot w_k) \cdot w_k}{(v \cdot w_k)^2} v \otimes v$$

pour tout vecteur v non orthogonal à w_k . On note que le choix $v = u_k - H_k \cdot w_k$ redonne la récurrence de rang 1 citée plus haut. Les principales corrections proposées utilisent pour v l'un des vecteur disponibles lors du calcul, à savoir u_k et w_k (puisque $u_k - H_k \cdot w_k$ est a priori moins intéressant !). Il est prouvé que, sous la condition $u_k \cdot w_k > 0$, le caractère défini positif de la matrice H_{k+1} est assuré (Roux [85]).

- le choix $v = u_k$ conduit à la correction DFP (Davison, Fletcher, Powell) pour laquelle :

$$H_{k+1} = H_k + \frac{1}{u_k \cdot w_k} u_k \otimes u_k - \frac{1}{w_k \cdot H_k \cdot w_k} (H_k \cdot w_k) \otimes (H_k \cdot w_k)$$

où $g^{(k)}$ est une direction de \mathbb{R}^n pour laquelle la fonction :

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = F(p^{(k)} + xg^{(k)}) \in \mathbb{R}$$

est décroissante dans un voisinage de $x = 0$ et $\alpha^{(k)} \in \mathbb{R}$ un paramètre réalisant le minimum de $f(x)$ dans ce voisinage ($\alpha^{(k)}$ est donc positif).

La méthode comporte ainsi deux étapes. La première consiste à déterminer, au point actuel $p^{(k)}$, une direction de descente $g^{(k)}$ “optimisée” par rapport à la connaissance actuelle de la fonctionnelle (c’est à dire toutes les informations concernant les étapes précédant la $k^{\text{ième}}$) ; c’est principalement cette construction qui différencie les méthodes de descente. Si seules les dérivées premières sont utilisées, la méthode est dite “de pente maximale” et si elle fait intervenir les dérivées secondes, elle est qualifiée de méthode à *métrique variable* ou méthode de Newton, qui possède comme on s’en doute de meilleures propriétés de convergence que les méthodes du premier type cité. La méthode de Newton consiste à approcher, localement autour de $p^{(k)}$, la fonction F par son développement au second ordre :

$$F(p) \simeq F(p^{(k)}) + \nabla F(p^{(k)}) \cdot (p - p^{(k)}) + \frac{1}{2}(p - p^{(k)}) \cdot A \cdot (p - p^{(k)})$$

où A est le hessien de F au point $p^{(k)}$, supposé défini positif, et de choisir la direction de descente celle vers le minimum p_0 de l’approximation quadratique qui vérifie :

$$[\nabla F(p^{(k)}) + A \cdot (p_0 - p^{(k)})] \cdot \delta p = 0$$

c’est à dire, comme A est inversible :

$$g^{(k)} = -A^{-1} \cdot \nabla F(p^{(k)})$$

Dans de nombreux cas, le calcul du hessien est cependant trop coûteux (voire impossible pratiquement) ce qui entraîne l’utilisation d’expressions approchées de celui-ci ; la méthode est alors appelée “quasi-Newton” (Broyden [15]). Ce type de méthode possède l’avantage de ne faire intervenir que le calcul du gradient et d’avoir une vitesse de convergence généralement supérieure aux algorithmes de pente maximale (Broyden, Dennis, Moré [18], Powell [81]). D’autre part, si la surface définie par $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ présente une “vallée” étroite, les méthodes de pente maximale convergent lentement par rapport aux méthodes de Newton qui prennent en compte l’information de courbure de la surface. La deuxième étape, dite de “line-search”, est la minimisation de la fonction f , une fois la direction $g^{(k)}$ choisie, pour déterminer le paramètre $\alpha^{(k)}$ optimal.

D’un point de vue pratique, il est important de travailler, dans chacune des deux étapes, sur des grandeurs normalisées (Fletcher [38]) : les composantes des vecteurs $p^{(k)}$ doivent être du même ordre de grandeur, sans quoi on risque d’obtenir des matrices (hessiens) mal conditionnées et par là des directions de recherche de minimum absurdes. On choisit ici de normaliser (dans la mesure du possible) les composantes des $p^{(k)}$ par $p_j^{(k)} \rightarrow p_j^{(k)}/p_j^{(0)}$ et F par $F(p^{(k)}) \rightarrow F(p^{(k)})/F(p^{(0)})$.

8.3.1 Algorithme BFGS

L’algorithme de type quasi-Newton que l’on a utilisé ici est l’algorithme BFGS (pour Broyden - Fletcher - Goldfarb - Shanno). L’approximation du hessien, ou plus précisément de son

8.2 Fonction coût

Les données d'un essai classique aux barres de Hopkinson sont les efforts et les vitesses appliqués aux deux faces de l'échantillon en fonction du temps. D'après la section 6.5, les données expérimentales se regroupent en grandeurs cinématiques (d^v) $v^d(x=0, t=t_i)$, $v^d(x=L, t=t_i)$ et les efforts, données duales (d^f), $\sigma^d(x=0, t=t_i)$, $\sigma^d(x=L, t=t_i)$. On a noté t_i les instants de mesure, généralement $t_i = i \Delta t$, avec Δt pas d'échantillonnage imposé par le dispositif expérimental, typiquement $1 \mu s$. On suppose pour l'instant qu'il n'y a pas de données complémentaires (c'est à dire $d^0 = \emptyset$ avec les notations de la section 6.5).

On suppose aussi dans un premier temps ces données suffisamment fiables pour pouvoir les utiliser directement comme conditions aux limites dans les calculs directs qui servent à décrire \mathcal{R}^{ad} . Les solutions de ces problèmes directs sont :

- la solution pour laquelle on impose $v^d(x=0, t=t_i)$ et $v^d(x=L, t=t_i)$, et la solution duale obtenue en imposant $\sigma^d(x=0, t=t_i)$ et $\sigma^d(x=L, t=t_i)$.
- la solution pour laquelle on impose $v^d(x=0, t=t_i)$ et $\sigma^d(x=L, t=t_i)$, et la solution duale obtenue en imposant $\sigma^d(x=0, t=t_i)$ et $v^d(x=L, t=t_i)$.

soit au total *quatre* types de problèmes directs.

En fait, les conditions aux limites expérimentales ne peuvent être imposées ainsi dans le calcul numérique. Il est nécessaire, en effet, de définir une procédure d'*interpolation* pour adapter ces données au format imposé par le pas de temps du calcul direct, fixé, lui, par la discrétisation spatiale de l'éprouvette et la célérité des ondes (cette dernière dépend des paramètres de comportement).

La description de \mathcal{R}^{ad} est alors très simple : ce sont les solutions obtenues en faisant varier le jeu de paramètres de la loi de comportement (dans des bornes physiquement admissibles) pour les quatre types de conditions aux limites citées plus haut.

Les différentes expressions de la fonctionnelle \mathcal{J} reposent sur les écarts définis dans la section 6.4. Un traitement global est alors possible si l'on remarque que ces écarts peuvent se mettre sous la forme d'une somme d'intégrales de champs mécaniques sur :

- la frontière de la structure et pour $t \in [0, T]$ (notée \mathcal{J}^T),
- l'état final de la structure (notée \mathcal{J}^Ω),
- la structure entière et pour $t \in [0, T]$ (notée $\mathcal{J}^{\Omega T}$),

de sorte que, dans notre cadre unidimensionnel, on peut écrire la fonctionnelle coût :

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \mathcal{J}^T + \mathcal{J}^\Omega + \mathcal{J}^{\Omega T} \\ &= \int_0^T j^T|_0^L dt + \int_0^L j^\Omega|_T dx + \int_0^L \int_0^T j^{\Omega T} dt dx \end{aligned} \quad (8.1)$$

où j^T , j^Ω et $j^{\Omega T}$ sont des densités d'écart. Ces densités d'écart sont des fonctionnelles des champs mécaniques (σ , ε , v) ; elles sont détaillées dans la suite pour certains cas particuliers.

8.3 Méthodes de descente

Le principe des méthodes de descente est de générer une suite $(p^{(k)})$ telle que :

$$p^{(k+1)} = p^{(k)} + \alpha^{(k)} g^{(k)} \quad k \in \mathbb{N}$$

8

Résolution numérique du problème d'identification

RÉSUMÉ : On explicite la méthode d'identification du comportement dans le cadre de l'essai aux barres de Hopkinson. Différentes approches sont comparées.

8.1 Stratégies de minimisation

La résolution du problème inverse repose, comme on l'a vu dans la deuxième partie, sur la minimisation d'une fonctionnelle mesurant l'écart entre données expérimentales et simulations. Cette minimisation se fait par rapport à un nombre n de paramètres, regroupés dans le vecteur $p = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$, dont dépendent les données simulées. La résolution du problème inverse s'écrit :

$$\text{trouver} \quad \min_{p \in \mathbb{R}^n} F(p)$$

problème pour lequel on ne peut faire a priori aucune hypothèse de convexité concernant F . Les algorithmes permettant cette minimisation peuvent être classés en deux catégories :

- les *méthodes de descente* qui, à partir d'un point $p^{(0)}$ donné, suivent un chemin dans \mathbb{R}^n tel que F soit décroissante le long de ce chemin. On perçoit immédiatement l'inconvénient de ce genre d'algorithme s'il existe des minima locaux : le minimum (a priori) local atteint dépend du point initial et rien ne permet d'affirmer qu'éventuellement ce minimum est global. On trouve une revue de ces différentes méthodes dans Belegundu (Belegundu, Arora [2], [3]).
- les *méthodes génétiques* qui consistent à faire évoluer une population initiale d'éléments $p^{(k)}$ de \mathbb{R}^n avec la règle de sélection selon laquelle un individu est plus performant qu'un autre s'il réalise une valeur inférieure de F (Holland [55]). L'avantage de ce genre de méthode est de pouvoir obtenir, selon la sévérité de la sélection, des fractions de population stagnant sur des minima locaux. La contrepartie est que le coût, en terme de nombre d'évaluations de F , est généralement bien plus élevé que pour les méthodes de descente.

Liste des tableaux

6.1	Réductions de \mathcal{R}^{ad}	64
9.1	Paramètres du modèle (vrais)	129
9.2	Sensibilités	133
9.3	Paramètres identifiés pour le sel gemme	134
9.4	Effet du bruit	142
9.5	Paramètres initiaux	142
9.6	Minima locaux	146

APPLICATION DE MÉTHODES INVERSES AU DÉPOUILLEMENT DE L'ESSAI AUX BARRES DE HOPKINSON

Ce travail a pour but l'optimisation du dépouillement de l'essai aux barres de Hopkinson dans les cas où une analyse classique ne peut s'appliquer. L'analyse classique suppose, en effet, l'équilibre des efforts imposés à l'échantillon au cours du chargement. Le comportement est, dans ce cas assimilable à une situation quasi-statique et où les champs mécaniques dans l'échantillon sont considérés comme homogènes, donné sous la forme d'une courbe contrainte - déformation. Dans certains cas cependant, cette hypothèse d'équilibre est illicite : l'échantillon doit être considéré comme une structure et non plus comme un élément de matière, puisque les effets d'inertie y jouent un rôle important. Il s'agit alors de trouver le comportement de l'échantillon à partir des efforts et des vitesses mesurées durant l'essai. Ceci constitue un problème de type inverse pour lequel l'information (sur le comportement) réside dans la donnée de conditions aux limites duales.

On propose une résolution du problème inverse général qui consiste à déterminer le comportement d'une structure pour laquelle on se donne le chargement à la fois en effort et en déplacement sur la frontière, comme fonctions du temps. Cette analyse permet, dans ce cadre mal posé (et pour des problèmes voisins comme le problème de Cauchy), de donner une solution au problème d'évolution de la structure. La résolution de ce problème inversé repose sur une notion d'écart au comportement, développée et discutée dans ce travail.

APPLICATION OF INVERSE METHODS TO THE ANALYSIS OF THE SPLIT HOPKINSON PRESSURE BAR TEST

The aim of the present work is the optimisation of the analysis of the split Hopkinson pressure bar test in cases where the classical method cannot apply. The classical assumption is the equilibrium of forces acting on by the specimen during the loading. In this case the behaviour can be given as a stress - strain curve because of the similarity with the quasi-static case and the assumption of homogeneity of mechanical fields in the specimen. However the assumption of equilibrium is not verified for any test. As a consequence, in these situations the specimen must be considered as a structure, taking account of inertial effects, and no longer as an element of matter and one has to find the specimen's behaviour through the forces and the velocities measured on it's faces during the experiment. This is an inverse problem for which the information lies in the duality of the given boundary conditions.

A solution is proposed for the generalized inverse problem : determine the behaviour of a structure with both forces and velocities given on the boundary as functions of time. The presented method provides a solution for the considered ill-posed problem (and other similar problems like Cauchy) of the evolution of a structure. The construction of this solution is based upon the compatibility gap developed and discussed in this work.

